Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 1

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 24.04.2018 in den Übungen

Sei K ein globaler Körper und $L \supset K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Für eine Stelle w von L mit Einschränkung v nach K bezeichne $D_w = D_{w/v} = D_{w,L/K} \subset G$ die Zerlegungsgruppe an w. Ist v eine nichtarchimedische Stelle, so bezeichnen k_v und l_w die Restklassenkörper von K and v bzw. von L an w, und $f(w,v) = [l_w : k_v]$ ist der Trägheitsindex von w/v. Die Körper k_v und l_w sind endlich und $\mathrm{Gal}(l_w/k_v)$ besitzt den kanonischen Erzeuger

$$\sigma_{w/v} \colon l_w \to l_w, \alpha \mapsto \alpha^{\# k_v}.$$

Ist ferner w/v unverzweigt, so wurde in der Vorlesung ein kanonischer Isomorphismus

$$r_{w/v} \colon D_{w/v} \to \mathrm{Gal}(l_w/k_v)$$

angegeben,[1] und man definiert das Artinsymbol oder den Frobeniusautomorphismus an w als

$$\mathrm{Frob}_{w,L/K} := (w, L/K) := r_{w/v}^{-1}(\sigma_{w/v}).$$

In der Vorlesung hatten wir bereits gezeigt: Für die (transitive) Operation von $\mathrm{Gal}(L/K)$ auf den Stellen über v gilt:

$$\forall g \in \mathrm{Gal}(L/K): \; g\,\mathrm{Frob}_{w,L/K}\, g^{-1} = \mathrm{Frob}_{gw,L/K};$$

die Stelle v zerfällt vollständig in L/K genau dann, wenn $\mathrm{Frob}_w = \mathrm{id}$.

1. Aufgabe (1+(2+2+1)=6 Punkte): Seien M, M' Zwischenkörper von $L \supset K$, und seien u, u' die Stelle von M bzw. M' unter w, und m_u bzw. $m'_{u'}$ die entsprechenden Restklassenkörper.

(a) Erläutern Sie die Definition der Zerlegungsgruppe von L/K an w und die Bedeutung davon, dass v bzw. w in L/K unverzweigt ist. Beschreiben Sie die Situation in Termen von Primidealen, sofern v nicht-archimedisch ist und sofern ein Dedekindring $R \subset K$ gegeben ist, für welchen gelten: $K = \mathrm{Quot}(R)$ und R ist im Bewertungsring zu v enthalten.

(b) Sei w unverzweigt in L/K. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Gruppe $D_{w/u}$ ist eine Untergruppe von $D_{w/v}$, man hat eine kanonische Identifikation von m_u als Unterkörper von l_w und unter dieser gelten

$$r_{w/u} = r_{w/v}|_{D_{w/u}}, \quad \sigma_{w/u} = \sigma_{w/v}^{f(u/v)}, \quad \text{sowie} \quad (w, L/M) = (w, L/F)^{f(u/v)}.$$

(ii) Ist M normal über K, so ist $D_{w/v}\,\mathrm{Gal}(L/M)/\,\mathrm{Gal}(L/M) \to D_{w,v}/D_{w/u}, \sigma \mapsto \sigma|_M$ ein Isomorphismus und man hat eine Abbildung kurzer exakter Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D_{w,u} & \longrightarrow & D_{w,v} & \longrightarrow & D_{u,v} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle r_{w/u}} & & \downarrow{\scriptstyle r_{w/v}} & & \downarrow{\scriptstyle r_{u/v}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(l_w/m_u) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(l_w/k_v) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(m_u/k_v) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

und es gilt $(u, M/K) = (w, L/K)|_M$.

---

[1]Das Symbol $r_{w/v}$ wurde in der Vorlesung nicht eingeführt. Statt $(w, L/K)$ schrieben wir $\left[\frac{\mathfrak{P}}{L/K}\right]$, sofern w zu $\mathfrak{P}$ korrespondiert.

(iii) Gilt $L = MM'$ und sind M, M' normal über K, so ist die Abbildung

$$\iota\colon \operatorname{Gal}(L/K) \to \operatorname{Gal}(M/K) \times \operatorname{Gal}(M'/K), \sigma \mapsto (\sigma|_M, \sigma|_{M'})$$

injektiv und es gilt $\iota((w, L/K)) = ((u, M/K), (u', M'/K))$.

Die folgende Aufgabe will die Bedeutung von Frobeniuselementen im Zusammenhang mit dem Dichtesatz von Čebotarev zeigen. Sei $\mathcal{P}_K$ die Menge aller Stelle von K und

$$\Sigma := \{v \in \mathcal{P}_K \mid v \text{ verzweigt in } L/K, \text{ oder } v \text{ ist archimedisch}\}.$$

Verwenden Sie ohne Beweis folgende abgeschwächte Form des Dichtesatzes von Čebotarev:
Satz: Für jede nicht-leere unter Konjugation abgeschlossene Teilmenge $C \subset G$ gilt

$$\#\{v \in \mathcal{P}_K \setminus \Sigma \mid \exists w \in \mathcal{P}_L \text{ über } v : \operatorname{Frob}_{w,L/K} \in C\} = \infty.$$

Insbesondere gibt es unendlich viele $v \in \mathcal{P}_K \setminus \Sigma$, welche in L/K vollständig zerfallen, d.h. mit $\operatorname{Frob}_{w,L/K} = \mathrm{id}$.

2. Aufgabe (2+2=4 Punkte): Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei zunächst $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ für ein $n \geq 3$ und $\zeta_n = \exp(2\pi i/n)$. Wir identifizieren $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ mit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ vermöge der Abbildung $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to G, a \mapsto \sigma_a$, wobei σ_a derjenige Automorphismus von L ist, so dass $\sigma_a(\zeta_n) = \zeta_n^a$ gilt. Für eine Primzahl q bezeichnen wir mit q auch die Stelle zu q. Dann gelten:

(i) Für eine Primzahl $q \nmid n$ und w eine Stelle über q gilt $\operatorname{Frob}_{w,L/K} = \sigma_q$.

(ii) Die Menge $\{q \text{ ist Primzahl} \mid q \equiv a \pmod{n}\}$ ist für jedes $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ unendlich.

(b) Seien L, K, M, M' wie in Aufgabe 1(b)(iii). Dann sind äquivalent:

(i) M ein Unterkörper von M'

(ii) Für alle $u \in \mathcal{P}_M$ und $u' \in \mathcal{P}_{M'}$ mit derselben Einschränkung $v \in \mathcal{P}_K \setminus \Sigma$ gilt:

$$\operatorname{ord}(\operatorname{Frob}_{u,M/L}) \text{ ist ein Teiler von } \operatorname{ord}(\operatorname{Frob}_{u',M'/L}).$$

Hinweis zu (i)⇒(ii): gilt $M \neq M'$ so ist MM' eine echte Erweiterung von M'.

3. Aufgabe (1+1+1+1+2=6 Punkte): Sei G eine Hausdorff topologische Gruppe und sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis der Eins bestehend aus offenen Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Zu jeder offenen Umgebung U von e, existiert eine offene Umgebung V von e mit $V \cdot V \subset U$ und $V = V^{-1}$; ist U zusätzlich abgeschlossen, so kann man V offen abgeschlossen wählen.

(b) Für jede kompakte Teilmenge $M \subset G$ gilt $M = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} M \cdot U$.

(c) Sei G kompakt, sei M eine offen abgeschlossene Umgebung der Eins und seien alle $U \in \mathfrak{U}$ offen abgeschlossen. Dann existiert ein $V \in \mathfrak{U}$ mit $M \cdot V = M$. **Hinweis:** $G \setminus M$ ist kompakt.

(d) Gelte $U = U^{-1}$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ (OE nach (b)). Seien $M, V, \mathfrak{U}$ wie in (c) und sei $H = \langle V \rangle$ die von V erzeugte Untergruppe von G. Dann gelten: H ist offen und $H \subset M$.

(e) Sei G kompakt. Dann ist G total unzusammenhängend genau dann, wenn e eine Umgebungsbasis auf offenen normalen Untergruppen besitzt.
Hinweis: Nutzen Sie, ohne Beweis, folgende Aussage: Ist X ein kompakter Hausdorffraum, so ist X total unzusammenhängend genau dann, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus offenen abgeschlossenen Teilmengen von X besitzt.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter
`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/azt2-ss2018/`