Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 10+11

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti *Besprechung:* Fr 13.07. und Di 17.07.2018 in den Übungen

---

Sei K ein Körper.

30. Aufgabe (3 Punkte, Skolem-Noether für Matrixalgebren): Sei $R = M_n(K)$. Sei V der Raum der Spaltenvektoren der Länge n über K, betrachtet als links-R-Modul. Beweisen Sie, dass jeder K-Algebrenisomorphismus $\phi\colon R \to R$ durch Konjugation mit einem Element in $R^\times$ gegeben ist, welches eindeutig bis einen Skalar in $K^\times$ ist, indem Sie zunächst folgende Aussagen nachweisen:

(a) Sei V_ϕ der R-Modul V mit der Operation $R \times V \to V, (r, v) \mapsto \phi(r)v$. Dann ist V_ϕ isomorph zu V als links-R-Modul.

(b) Sei $\psi\colon V \to V_\phi$ ein R-Modulisomorphismus, d.h., $\forall v \in V, \forall r \in R : \psi(rv) = \phi(r)\psi(v)$. Dann gibt es ein $y \in \mathrm{Aut}_K(V) = \mathrm{GL}_n(K)$, welches ψ darstellt, so dass $yrv = \phi(r)yv$ für $v \in V, r \in R$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Kategorie der endlich-dimensionalen links-R-Moduln halbeinfach ist und das der Raum der Spaltenvektoren der Länge n über K bis auf Isomorphie der einzige einfache links-R-Modul ist.

31. Aufgabe (4 Punkte, Galoisabstieg): Sei $L \supset K$ eine Galoiserweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Sei V ein L-Vektorraum mit diskreter Topologie. Eine G-Struktur auf V ist eine K-lineare stetige G-Operation auf V, so dass $\sigma(\alpha v) = \sigma(\alpha)\sigma(v)$ für $\alpha \in L$, $v \in V$ und $\sigma \in G$, gilt. Ist U ein K-Vektorraum, so besitzt der L-Vektorraum $L \otimes_K U$ (mit $\alpha \cdot (u \otimes \beta) = u \otimes \alpha\beta$) eine G-Struktur durch $\sigma(u \otimes \beta) = u \otimes \sigma\beta$ für $\beta \in L$, $u \in U$ und $\sigma \in G$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei U ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $M = \mathrm{End}_K(U)$.

- (i) Man hat einen Isomorphismus $M \cong U \otimes_K U^\vee$ von links-M-Moduln.
- (ii) Für alle M-Moduln I ist $U \otimes_K \mathrm{Hom}_M(U, I) \cong I, \sum_i u_i \otimes \phi_i \mapsto \sum_i \phi_i(u_i)$ ein Isomorphismus.

(b)

- (i) Man kann Elemente von $L[G]$ als K-lineare Endomorphismen von L betrachten. Dies definiert einen Isomorphismus $L[G] \to \mathrm{End}_K(L)$ von L- Vektorräumen, sofern $[L : K] < \infty$.
- (ii) Ist V ein beliebiger L-Vektorraum mit G-Struktur, so ist $\phi\colon L \otimes_K V^G \to V, \alpha \otimes w \mapsto \alpha \cdot w$ ein Isomorphismus von L-Vektorräumen mit G-Struktur.
  Hinweis: Im Fall $[L : K] = \infty$ verwende man $V = \mathrm{colim}_{M \in \mathcal{G}_K, M \subset L} V^{\mathrm{Gal}(L/M)}$.

Eine zentral-einfache K-Algebra A ist eine endlich-dimensionale K-Algebra mit Zentrum K, welche nur 0 und A als zweiseitige Ideale besitzt. Endlich-dimensionale K-Divisionsalgebren mit Zentrum K sind zentral einfach; ist A zentral-einfach, so auch die Matrixalgebra $M_n(A)$. Aus Algebra 2 folgt, dass jede zentral-einfache K-Algebra isomorph zu $M_m(D)$ für eine endlich-K-dimensional Divisionsalgebra $D \subset A$ mit Zentrum K und ein $m \in \mathbb{N}$ ist. Dabei ist m eindeutig und D eindeutig bis auf Isomorphie. Sei im Weiteren K^{alg} ein algebraischer Abschluss von K und $K^{\mathrm{sep}} \subset K^{\mathrm{alg}}$ der separable Abschluss von K in K^{alg}.

32. Aufgabe (2+3+3+1+1 Punkte, Zentral einfache Algebren): Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei A eine endlich-dimensionale K-Algebra und $L \supset K$ eine Galoiserweiterung. Dann ist A zentral-einfach über K genau dann, wenn $A \otimes_K L$ zentral-einfach über L ist.
Hinweis: Man kann Aufgabe 31 auf das Radikal und das Zentrum von $A \otimes_K L$ anwenden.

(b) Ist K separabel abgeschlossen und D eine zentrale Divisionsalgebra, so gilt $D = K$. **Verifizieren Sie hierzu die folgenden Aussagen:** Nehmen Sie an, ein $a \in D \setminus K$ existiere. Dann ist $K(a)$ eine endliche rein inseparable Körpererweiterung von K. Ohne Einschränkung gelte $a^p \in K$ für $p = \operatorname{Char} K > 0$. Die Abbildung $d_a : D \to D, d \mapsto da - ad$ ist nicht Null. Die Abbildung $(d_a)^p$ ist gleich d_{a^p} und identische Null. Sei $b \in D$ mit $c := d_a b \neq 0$ und $d_a c = 0$. Es folgt $ada^{-1} = 1 + d$ für $d = bc^{-1}a$. Konjugation mit a ist ein nicht-trivialer Körperautomorphismus von $K(d)$.

(c) Für eine endlich-dimensionale K-algebra B sind folgende Aussagen äquivalent.

   (i) B ist zentral einfach.

   (ii) $B \otimes_K K^{\mathrm{sep}}$ ist eine endlich-dimensionale Matrixalgebra über K^{sep}.

   (iii) Es gibt eine endliche Galoiserweiterung M von K, so dass $B \otimes_K M$ isomorph zu einer Matrixalgebra über M ist.

(d) Sind A, A' zentral-einfache K-Algebren, so auch $A \otimes_K A'$.

(e) Für eine zentral-einfache K-Algebra A ist folgende Abbildung ein K-Algebrenisomorphismus

$$A \otimes_K A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Aut}_K(A) \cong M_{\dim A}(K), (b \otimes b') \mapsto (a \mapsto bab').$$

Hierbei ist A^{op} der Gegenring zu A (die unterliegende Menge und die Addition sind die aus A, und die Multiplikation ist durch $a \cdot_{A^{\mathrm{op}}} b = b \cdot_A a$ definiert).

Sei $\mathcal{B}(K) := \{B \mid B$ endlich-dimensionale zentral-einfachen K-Algebra$\}/\sim$ wobei $B \sim B'$ genau dann, wenn es $n, n' \in \mathbb{N}$ gibt mit $M_n(B) \cong M_{n'}(B')$, also genau dann wenn B und B' isomorph zu Matrixalgebren über demselben K-zentral-einfachen Schiefkörper sind.

33. Aufgabe (1+2 Punkte, Klassische Brauergruppe): Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathcal{B}(K)$ wird zu einer abelschen Gruppe indem man einem Paar von Klassen $([B], [B'])$ die Klasse von $B \otimes_K B'$ zuordnet.

(b) Für jeden Oberkörper L von K definiert $B \to B \otimes_K L$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{B}(K) \to \mathcal{B}(L)$. Bezeichne $\mathcal{B}(L/K)$ den Kern dieser Abbildung. Dann gilt $\mathcal{B}(K) = \operatorname{colim}_M \mathcal{B}(M/K)$, wobei M alle endlichen Galoiserweiterungen von K durchläuft.

Bemerkung: Sei $\mathcal{B}(L/K, n) = \{[B] \in \mathcal{B}(L/K) \mid \dim_K B = n^2\}$. Dann ist $\mathcal{B}(L/K, n)$ die Menge der Isomorphieklassen zentral-einfacher K-Algebren B, für welche $B \otimes_K L \cong M_n(L)$ gilt.

Sei L eine (nicht-notwendig endliche) Galoisererweiterung von K mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Dann ist $\mathrm{GL}_n(L)$ eine G-Gruppe im Sinn von Aufgabe 29, indem man $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ und $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathrm{GL}_n(L)$ die Matrix ${}^{\sigma}A := (\sigma(a_{i,j}))_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathrm{GL}_n(L)$ zuordnet. In analoger Weise definiert man auf $\mathrm{SL}_n(L)$, $\mathrm{PGL}_n(L) = \mathrm{GL}_n(L)/(L^\times)$ eine Struktur als G-Gruppen (im letzten Fall werden die Elemente von $L^\times$ als Skalarmatrizen in $\mathrm{GL}_n(L)$ betrachtet).

34. Aufgabe (2+1+1 Punkte, Hilbert 90): Zeigen Sie:

(a) Es gilt $H^1(G, \mathrm{GL}_n(L)) = 1$. **Hinweis:** Adaptieren Sie den Beweis für $n = 1$. Sei $s \mapsto a_s$ ein Kozykel. Die Summen der Form $S(x) := \sum_{s \in G} a_s . s(x)$, $x \in K^n$, erzeugen L^n als L-Vektorraum. Nun wähle man $x_1, \dots, x_n$ so, dass die $S(x_i)$ eine Basis bilden. Das Bild der Matrix $(x_1|\dots|x_n)$ unter S ist dann invertierbar.

(b) Die exakte Sequenz $1 \to L^\times \to \mathrm{GL}_n(L) \to \mathrm{PGL}_n(L) \to 1$ induziert eine exakte Sequenz $1 \to H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L)) \xrightarrow{\partial_n^2} H^2(G, L^\times)$ punktierter Mengen. **Hinweis:** Aufgabe 29(b) und (c).

(c) Ist $c \colon G \to \mathrm{GL}_n(L)$ eine Abbildung mit $(c \bmod L^\times) \in Z^1(G, \mathrm{PGL}_n(L)))$, so liegt $a : G \times G \to L^\times$, $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto c(\sigma_1) \cdot {}^{\sigma_1}c(\sigma_2) \cdot c(\sigma_1\sigma_2)^{-1}$ in $Z^2(G, L^\times)$ und es gilt $\partial_n^2[c \bmod L^\times] = [a]$.

Bemerkung: Aus 34(a) lässt sich auch leicht $H^1(G, \mathrm{SL}_n(L)) = 1$ herleiten.

Sei nun $A \in \mathcal{B}(L/K, n)$ und sei $\phi\colon A \otimes_K L \to M_n(L)$ ein L-Algebrenisomorphismus. Die Wirkung von G auf L induziert für jedes $\sigma \in G$ einen Isomorphismus $\mathrm{id}_A \otimes \sigma$ von $A \otimes_K L$. Dann definiert $a \mapsto {}^{\sigma}(\phi \circ (\mathrm{id}_A \otimes \sigma^{-1}) \circ \phi^{-1} a)$ einen L-Algebrenautomorphismus von $M_n(L)$. Gemäß Aufgabe 30 ist dieser gegeben durch Konjugation mit einem $x_{\phi,\sigma} \in \mathrm{GL}_n(L)$ mit eindeutigem Bild $\bar{x}_{\phi,\sigma} \in \mathrm{PGL}_n(L)$.

35. Aufgabe (2+2+1+2+1 Punkte, Brauergruppe und Galoiskohomologie): Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $G \to \mathrm{PGL}_n(L), \sigma \mapsto \bar{x}_{\phi,\sigma}$ definiert einen 1-Kozykel, dessen Klasse $\alpha_A = (\sigma \mapsto \alpha_{A,\sigma})$ in $H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L))$ ist unabhängig von der Wahl von ϕ.

(b) Die Abbildung $\theta_n\colon \mathcal{B}(L/K, n) \to H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L)), [B] \mapsto \alpha_B$ ist wohldefiniert und bijektiv. **Hinweis zur Surjektivität:** Sei $g \mapsto a_g$ ein 1-Kozykel. Man definiert eine G-Wirkung auf $M_n(L)$ durch $g.m = a_g({}^g m)$, wobei ${}^g m$ die vor Aufgabe 34 beschrieben G-Wirkung auf Matrizen ist. Dann bilden die G-Invarianten von $M_n(L)$ eine zentral-einfache K-Algebra.

(c) Die induzierte Abbildung $\delta_{L/K}\colon \mathcal{B}(L/K) = \bigcup_n \mathcal{B}(L/K, n) \to \mathrm{Br}(L/K)$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. **Hinweis:** Sie können folgendes Ergebnis ohne Beweis verwenden: Die Abbildungen $\delta_n := \partial_n^2 \circ \theta_n\colon \mathcal{B}(L/K, n) \to \mathrm{Br}(L/K)$ erfüllen $\delta_{nn'}([B] \otimes [B']) = \delta_n(B) \cdot \delta_{n'}(B')$ für $[B] \in \mathcal{B}(L/K, n)$ und $[B'] \in \mathcal{B}(L/K, n')$.

(d) Die Abbildung $\delta_{L/K}$ ist surjektiv und also ein Isomorphismus.
Hinweis: Sei G endlich und $(a : (h, g) \mapsto a_{g,h}) \in Z^2(G, L^\times)$. Definiere $V = \bigoplus_{\sigma \in G} K e_g$ als den K-Vektorraum mit Basis $(e_g)_{g \in G}$ und $p_g \in \mathrm{End}_K(V)$ durch $p_g : e_h \mapsto a_{g,h} e_{gh}$. Dann ist $g \mapsto p_g$ ein 1-Kozykel $\alpha \in Z^1(G, \mathrm{PGL}_{\#G}(L))$ und es gilt $\partial_n^2([\alpha]) = a$.

(e) Sei K ein nicht-archimedischer lokaler Körper und D eine zentrale K-Divisionsalgebra mit $\dim_K D = d^2$. Dann gilt $D \otimes_K L \cong M_d(L)$ für jede Galoiserweiterung $L \supset K$ mit $d \| [L : K]$.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter

`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`