Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 2

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti *Besprechung:* Di 08.05.2018 in den Übungen

Für zwei topologische Gruppen G, H bezeichne $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, H)$ die Menge der stetigen Gruppenhomomorphismen von G nach H. Ist H endlich, so trage H die diskrete Topologie. Ist H abelsch, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, H)$ ein $\mathbb{Z}$-Modul.

4. Aufgabe (4 Punkte, Basissatz von Burnside): Sei G eine pro-p Gruppe und sei $\Phi(G)$ die Frattini-Untergruppe von G, d.h. der topologische Abschluss der erzeugt ist von den Kommutatoren $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$, für $g, h \in G$ und den p-Potenzen g^p für $g \in G$. Sei weiter $S \subset G$ eine endliche Teilmenge. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussage:

(a) G wird topologisch erzeugt von S.

(b) Die Auswertungsabbildung $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, (\mathbb{F}_p, +)) \to \mathbb{F}_p^S, \phi \mapsto (\phi(s))_{s\in S}$ der stetigen Gruppenhomomorphismen $\phi \colon G \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{F}_p^S$ ist injektiv.

(c) $G/\Phi(G)$ ist ein endlich-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum mit den Bildern von S als Erzeugendensystem.

Hinweis: Beweisen Sie die Äquivalenzen zunächst für endliche p-Gruppen. In diesem Fall kann mann beim Beweis (c)$\Rightarrow$(a) z.B. mit Induktion über $\#G$ arbeiten und ohne Beweis verwenden, dass die Durchshnitt zwischen dem Zentrum einer endlichen p-Gruppe H und einer nicht-trivialen Untergruppe von H nicht-trivial ist.
Sie sollten für (b)$\Rightarrow$(c) auch überlegen, dass $\Phi(G)$ gerade der Durchschnitt der Kerne aller stetigen Abbildungen $G \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist, und hieraus folgern, dass die von $G \to G/\Phi(G)$ induziert Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G/\Phi(G), (\mathbb{F}_p, +)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, (\mathbb{F}_p, +))$ ein Isomorphismus ist.

Im Weiteren bezeichne K einen Körper und K^{sep} einen separablen Abschluss von K, es sei ℓ eine Primzahl verschieden von $\mathrm{Char}\, K$ und es sei $\mu_\ell(K) = \{\zeta \in K \mid \zeta^\ell = 1\}$. Außerdem bezeichne $\mathcal{P}'_K$ die Menge der nicht-archimedischen Stellen von K, die nicht Restklassencharakteristik ℓ besitzen.

5. Aufgabe (2+4+6 Punkte, Kummertheorie): Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei K ein Körper mit $\#\mu_\ell(K) = \ell$. In der Algebra 1 wurde gezeigt, dass sich jede Galoiserweiterung L von K mit $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ schreiben lässt als $K(\sqrt[\ell]{f})$ für ein $f \in K^\times \setminus K^{\times\ell}$, wobei $\sqrt[\ell]{f} \in K^{\mathrm{sep}}$ eine beliebige ℓ-te Wurzel von f ist. Folgern Sie, dass die folgende Abbildung ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-Moduln ist:

$$K^\times/K^{\times\ell} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_K, \mu_\ell(K)), f \mapsto \left(\sigma \mapsto \frac{\sigma(\sqrt[\ell]{f})}{\sqrt[\ell]{f}}\right).$$

(b) Sei K ein lokaler nicht-archimedischer Körper.

(i) Sei $[K : \mathbb{Q}_\ell]$ der Grad von K über $\mathbb{Q}_\ell$ sofern $\mathbb{Q}_\ell$ in K liegt, und 0 anderenfalls. Dann gilt

$$\dim_{\mathbb{F}_\ell} K^\times/K^{\times\ell} = 1 + \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mu_\ell(K) + [K : \mathbb{Q}_\ell].$$

(ii) Gilt $\#\mu_\ell(K) = \ell$, so ist die pro-ℓ Komplettierung von G_K topologisch endlich erzeugt.

(iii) Die pro-ℓ Komplettierung von G_K ist topologisch endlich erzeugt.
Hinweis: Man überlege, dass folgende Abbildung injektiv ist:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_K, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_{K(\zeta_\ell)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}), \phi \mapsto \phi|_{G_{K(\zeta_\ell)}}.$$

(c) Sei K ein globaler Körper und sei Σ eine endliche Stellenmenge von K, welche $\mathcal{P}_K \setminus \mathcal{P}'_K$ umfasst. Sei K_Σ die Vereinigung aller Unterkörper $L \subset K^{\mathrm{sep}}$ mit $[L : K] < \infty$, so dass L/K unverzweigt ausserhalb von Σ ist. Mit $\mathbf{C}(K)$ wird die Klassengruppe von K bezeichnet.[1] In den Teilen (ii)-(v) gelte $\#\mu_\ell(K) = \ell$. Dann gelten:

   (i) K_Σ ist eine Galoiserweiterung; wir definieren $G_{K,\Sigma} := \mathrm{Gal}(K_\Sigma/K)$.

   (ii) Sei $f \in K^\times \setminus K^{\times \ell}$. Dann ist $K(\sqrt[\ell]{f})$ verzweigt über K an einer Stelle $w \in \mathcal{P}'_K$ genau dann, wenn die Bewertung $v_w(f)$ von f and w nicht durch ℓ teilbar ist.

   (iii) Sei $S_{\Sigma,\ell} := \{f \in K^\times \mid \forall w \notin \Sigma : v_w(f) \equiv 0 \bmod \ell\}/K^{\times \ell}$. Dann ist die Abbildung $S_{\Sigma,\ell} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_{K,\Sigma}, \mu_\ell(K)), f \mapsto \left(\sigma \mapsto \frac{\sigma(f)}{f}\right)$ ein Isomorphismus von $\mathbb{F}_\ell$-Vektorräumen.

   (iv) Sei $S^0_{\Sigma,\ell} := \{f \in K^\times \mid \forall w \notin \Sigma : v_w(f) = 0\}/K^{\times \ell}$ und sei ψ die Abbildung
   $$S_{\Sigma,\ell} \to \mathbf{C}(K), f \mapsto \sum_{w \in \mathcal{P}_K \setminus \Sigma} \frac{v_w(f)}{\ell}[v].$$
   Dann ist $0 \to S^0_{\Sigma,\ell} \to S_{\Sigma,\ell} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C}(K)$ exakt.

   (v) Der $\mathbb{F}_\ell$-Vektorraum $S_{\Sigma,\ell}$ hat endliche Dimension.

   (vi) Die pro-ℓ Komplettierung von $G_{K,\Sigma}$ ist topologisch endlich erzeugt.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter

`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`

[1] Für einen globalen Körper K sei $I(K)$ die freie abelsche Gruppe auf der Basis $[w]$ aller nicht-archimedischen Stellen $w \in \mathcal{P}^{\mathrm{n.a.}}_K$ von K. Für $f \in K^\times$ sei $\mathrm{div}(f) := \sum_{w \in \mathcal{P}^{\mathrm{n.a.}}_K} v_w(f)[v] \in I(K)$, und es $P(K)$ das Bild von $\mathrm{div}\colon K^\times \to I(K)$. Man definiert $\mathbf{C}(K) := I(K)/P(K)$. Ist K ein Zahlkörper, so ist $\mathbf{C}(K) = \mathbf{C}(\mathcal{O}_K)$ mit $\mathbf{C}(\mathcal{O}_K)$ wie in der AZT 1 definiert, und dann ist $\mathbf{C}(K)$ endlich. Ist K ein globaler Funktionenkörper, so dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass der Torsionsuntermodul $\mathbf{C}(K)_{\mathrm{tors}}$ von $\mathbf{C}(K)$ endlich ist; es gilt hier außerdem $\mathbf{C}(K)/\,\mathbf{C}(K)_{\mathrm{tors}} \cong \mathbb{Z}$.