Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 3

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 15.05.2018 in den Übungen

Für einen Körper K und $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p sei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel in K^{alg}, und es sei $\mu_n \subset K^{\mathrm{alg},\times}$ die von ζ_n erzeugte Untergruppe. Weiter bezeichne für eine Primzahl p das Symbol $\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ den inversen Limes über alle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wobei n alle zu p teilerfremden $n \in \mathbb{N}$ durchläuft, und diese durch Dividierbarkeit geordnet sind.

6. Aufgabe (1+2+1+2 Punkte, Zahm verzweigte Erweiterungen): Sei K ein lokaler Körper mit uniformisierendem Element π, Restklassencharakteristik p und Restklassenkörper k der Kardinalität q. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$K(n) := K[\zeta_{q^n-1}, \sqrt[q^n-1]{\pi}].$$

Zeigen Sie:

(a) Die Erweiterung $K(n)$ ist Galoisch über K und ihre Galoisgruppe $G(n) := \mathrm{Gal}(K(n)/K)$ sitzt in einer kurzen exakten Sequenz

$$1 \to \mu_{q^n-1} \to G(n) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 1.$$

(b) Die Gruppe $G(n)$ besitzt erzeugende Elemente s, t so dass t ein Erzeuger von μ_{q^n-1} ist, das Bild von s ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und so dass gilt $sts^{-1} = t^q$. Insbesondere spaltet die Sequenz in (a).

(c) Es gilt $K^{\mathrm{tr}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(n)$.

(d) Die Gruppe $G(\infty) := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{tr}}/K) = \varprojlim_n G(n)$ sitzt in einer kurzen exakten Sequenz

$$1 \to \hat{\mathbb{Z}}^{(p)} \to G(\infty) \to \hat{\mathbb{Z}} \to 1,$$

und es gibt topologische Erzeuger s, t von $G(\infty)$, so dass t ein topologischer Erzeuger von $\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ ist und das Bild von s in $\hat{\mathbb{Z}}$ ein topologischer Erzeuger ist, so dass $sts^{-1} = t^q$ gilt.

7. Aufgabe (2, Diskriminante): Sei K ein lokaler Körper und $E \supset K$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoishülle L über K. Seien $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ und $H = \mathrm{Gal}(L/E)$, und sei v_E die normalisierte Bewertung auf E. Zeigen Sie folgende Formel für die Diskriminante von E über K:

$$v_E(\mathfrak{D}_{E/K}) = \frac{1}{e(L/E)} \sum_{\sigma \in G\setminus H} i_{L/K}(\sigma);$$

hierbei ist $e(L/E)$ der Verzweigungsindex der Erweiterung L/E, und $i_{L/K}(\sigma)$ die größte natürliche Zahl i, so dass σ zur höheren Verweigungsgruppe G_i von L/K gehört.

8. Aufgabe (2+1 Punkte, Höhere Verzweigungsgruppen): Sei $L = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ und $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für die höheren Verzweigungsgruppen G_i von G gilt

$$G_i = \begin{cases} G, & -1 \le i \le 0 \\ \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^k})), & p^{k-1} \le i < p^k - 1 \text{ und } 1 \le k \le n-1 \\ \{1\}, & p^{n-1} \le i. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis $v_L(\zeta_{p^n} - 1) = 1$.

(b) Für die Herbrandfunktion $\phi = \phi_{L/K}$ gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\right)(s) = \begin{cases} 1, & -1 < s < 0 \\ \frac{1}{p^k - p^{k-1}}, & p^{k-1} < s < p^k - 1 \text{ und } 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{1}{p^n - p^{n-1}}, & p^{n-1} < s. \end{cases}$$

9. Aufgabe (2, Verzweigungsgruppe als semidirektes Produkt): Sei $L \supset K$ eine Galoiserweiterung lokaler Körper mit Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ und höherer Verzweigungsfiltrierung $(G_i)_{i \geq -1}$. Zeigen Sie $G_0 \cong G_1 \rtimes G_0/G_1$.
Hinweis: Die Gruppe G_0/G_1 ist zyklisch von Ordnung m prim zu p. Finden Sie $s \in G_0$ der Ordnung m.

10. Aufgabe (3 Punkte, Die Abbildungen θ_i): Sei $L \supset K$ eine Galoiserweiterung lokaler Körper mit Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ und höherer Verzweigungsfiltrierung $(G_i)_{i \geq -1}$. Sie ℓ der Restklassenkörper von L. In der Vorlesung wurden injektive Gruppenhomomorphismen $\theta_0 \colon G_0/G_1 \to \ell^\times$ und $\theta_i \colon G_i/G_{i+1} \to (\ell, +)$ definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $\sigma \in G_0$ und $\tau \in G_i/G_{i+1}$ gilt $\theta_i(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \theta_0(\sigma)^i \theta_i(\tau)$.

(b) Für $\sigma \in G_0$ und $\tau \in G_i$ gilt $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in G_{i+1} \iff \sigma^i \in G_1$ oder $\tau \in G_{i+1}$.

(c) Ist G abelsch und $m = \#G_0/G_1$, so gilt $G_i = G_{i+1}$ falls $m \nmid i$.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter

`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`