Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 4

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 22.05.2018 in den Übungen

In der Vorlesung wurden Doppelkomplexe $C^{\bullet,\bullet} = (C^{i,j}, d^{i,j}_{C,h}, d^{i,j}_{C,v})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ über Mod_R definiert.[1] Wir betrachten nur Doppelkomplexe, für welche $\{i \mid C^{i,n-i} \neq 0\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ endlich ist![2] Ein Morphismus $f\colon C^{\bullet,\bullet} \to D^{\bullet,\bullet}$ von Doppelkomplexen ist ein Tupel $f = (f^{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ von Morphismen $f^{i,j}\colon C^{i,j} \to D^{i,j}$ in Mod_R, so dass für all $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ gilt:

$$d^{i,j}_{D,h} \circ f^{i,j} = f^{i+1,j} \circ d^{i,j}_{C,h} \text{ und } d^{i,j}_{D,v} \circ f^{i,j} = f^{i,j+1j} \circ d^{i,j}_{C,v}.$$

Die so definierte Kategorie $\mathrm{Ch}^{*,*}(R)$ der Doppelkomplexe über Mod_R abelsch ist (ein Beweis ist nicht verlangt): Addition von Morphismen, Kerne und Kokerne von Morphismen sind komponentenweise definiert. Insbesondere kann man von exakten Sequenzen in $\mathrm{Ch}^{*,*}(R)$ sprechen. Man beachte, dass das Vertauschung von Zeilen und Spalten eine Involution τ auf $\mathrm{Ch}^{*,*}$ definiert, d.h., $(\tau C)^{i,j} = C^{j,i}$, $(\tau d)^{i,j}_{C,h} = d^{j,i}_{C,v}$ und $(\tau d)^{i,j}_{C,v} = d^{j,i}_{C,h}$.

Die Zeilen und Spalten eines Doppelkomplexes bilden Komplexe. Die Abbildungen eines Doppelkomplexes zwischen benachbarten Zeilen und Spalten bilden nur nach alternierendem Vorzeichenwechsel einen Morphismus von Komplexen: aus der Bedingung für Differentiale

$$(\dagger) \quad d^{i+1,j}_v \circ d^{i,j}_h + d^{i,j+1}_h \circ d^{i,j}_v = 0$$

folgen $d^{i+1,j}_v \circ ((-1)^j d^{i,j}_h) = ((-1)^{j+1} d^{i,j+1}_h) \circ d^{i,j}_v$ und $((-1)^{i+1} d^{i+1,j}_v) \circ d^{i,j}_h = d^{i,j+1}_h \circ ((-1)^i d^{i,j}_v)$.

Zu einem Doppelkomplex wie oben wurde der Totalkomplex $TC^\bullet := \mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet} \in \mathrm{Ch}^*(R)$ definiert durch $TC^i := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C^{i-j,j}$ und die Differentiale d^i_{TC} sind die Summe über alle j der Abbildungen

$$d^{i-j,j}_h \oplus d^{i-j,j}_v \colon C^{i-j,j} \to C^{i-j+1,j} \oplus C^{i-j,j+1} \hookrightarrow TC^{i+1}.$$

Ist $f\colon C^{\bullet,\bullet} \to D^{\bullet,\bullet}$ ein Morphismus von Doppelkomplexen, so erhält man eine Abbildungsfolge $Tf := \mathrm{Tot}(f) = (Tf^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ durch $Tf^i := \oplus_j f^{i-j,j}\colon TC^i \to TD^i$.

11. Aufgabe (2+2+1+1+3+4⋆+3⋆ Punkte, Doppelkomplexe): Sei $f\colon C^{\bullet,\bullet} \to D^{\bullet,\bullet}$ ein Morphismus in $\mathrm{Ch}^{*,*}(R)$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Der Totalkomplex $TC = \mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet}$ ist ein Komplex, d.h., es gilt $d^{i+1}_{TC} \circ d^i_{TC} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und die Abbildungsfolge $\mathrm{Tot}(f)$ ist ein Morphismus $\mathrm{Tot}(C) \to \mathrm{Tot}(D)$ in $\mathrm{Ch}^*(R)$.

(b) Sind alle Zeilenkomplexe von $C^{\bullet,\bullet}$ exakt, so ist $\mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet}$ exakt.
Bemerkung: Die analoge Aussage für Spaltenkomplexe gilt ebenfalls; sie darf ohne Beweis verwendet werden. Man beweist sie aus der Aussage für Zeilen, indem man τ anwendet.
Lösungshinweis: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ existieren $i_0 \leq i_1$ in $\mathbb{Z}$, so dass $C^{i,j} = 0$ für $i + j = n$ und i außerhalb $[i_0, i_1]$. Ist nun z ein i-Kozykel von $\mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet}$, so zeige man mit Induktion über $i' \geq i_0$, dass man diesen um einen Korand so abändern, kann, dass z in $\oplus_{i'\leq i, i+j=n} C^{i,j}$ liegt.

(c) Ist $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Ch}^{*,*}(R)$, so ist die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Tot}\, C' \xrightarrow{\mathrm{Tot}\, f} \mathrm{Tot}\, C \xrightarrow{\mathrm{Tot}\, g} \mathrm{Tot}\, C'' \to 0$$

in $\mathrm{Ch}^*(R)$ exakt.

---

[1] Der Index C an den Differentialen wird nur angegeben, wenn dies zur Unterscheidung notwendig ist.
[2] Dies ist im allgemeinen nicht notwendig. Dann ergeben sich aber zwei natürliche Definitionen von Tot.

(d) Definiere die Tupel $t_{h,\geq n}C := (t_{h,\geq n}C^{i,j}, t_{h,\geq n}d_h^{i,j}, t_{h,\geq n}d_v^{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ (truncation) durch

$$t_{h,\geq n}C^{i,j} := \begin{cases} C^{i,j}, & \text{falls } i \geq n \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad t_{h,\geq n}d_h^{i,j} := \begin{cases} d_h^{i,j}, & \text{falls } i \geq n \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad t_{h,\geq n}d_v^{i,j} := \begin{cases} d_v^{i,j}, & \text{falls } i \geq n \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $t_{h,\leq n}C := (t_{h,\leq n}C^{i,j}, t_{h,\leq n}d_h^{i,j}, t_{h,\leq n}d_v^{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ durch

$$t_{h,\leq n}C^{i,j} := \begin{cases} C^{i,j}, & \text{falls } i \leq n \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad t_{h,\leq n}d_h^{i,j} := \begin{cases} d_h^{i,j}, & \text{falls } i < n \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad t_{h,\leq n}d_v^{i,j} := \begin{cases} d_v^{i,j}, & \text{falls } i \leq n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ bezeichne $\iota_{h,\geq n}^{i,j}\colon t_{h,\geq n}C^{i,j} \to C^{i,j}$ die kanonische Inklusion und $\pi_{h,\leq n}^{i,j}\colon C^{i,j} \to t_{h,\leq n}C^{i,j}$ die kanonische Surjektion, sowie $\iota_{h,\geq n} := (\iota_{h,\geq n}^{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ und $\pi_{h,\leq n} := (\iota_{h,\leq n}^{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$. Dann sind $t_{h,\geq n}C$ und $t_{h,\leq n}C$ Doppelkomplexe über Mod_R, die Tupel $\iota_{h,\geq n}$ und $\pi_{h,\leq n}$ sind Morphismen von Doppelkomplexen, und

$$0 \to t_{h,\geq n}C \overset{\iota_{h,\geq n}}{\to} C \overset{\pi_{h,\leq n-1}}{\to} t_{h,\leq n-1}C \to 0, \tag{1}$$

ist eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Ch}^{*,*}(R)$. Beweisen Sie nur die letzte Aussage!
Bemerkung: Analoge Definitionen und Aussagen gelten auch für abgeschnittene Komplexe in vertikaler Richtung (Anwendung von τ!); die Beweise müssen nicht gegeben werden.

(e) Sei $n \in \mathbb{Z}$ und D der Doppelkomplex (bitte nachweisen!) mit $D^{n-1,\bullet} := \mathrm{Tot}\, t_{h,\leq n-1}C[n-1]$ in Spalte $n-1$,[3] mit $D^{n,\bullet} := \mathrm{Tot}\, t_{h,\geq n}C[n]$ in Spalte n, und Spalte $D^{i,\bullet} = 0$ für $i \neq n-1, n$, den horizontalen Differentialen $d_{D,h}^{i,j} = 0$ für $i \neq n-1$ und $d_{D,h}^{n-1,j}$ als den Morphismen

$$D^{n-1,j} \overset{\text{kanon.}}{\longrightarrow} C^{n-1,j} \overset{d_{C,h}^{n-1,j}}{\longrightarrow} C^{n,j} \overset{\text{kanon.}}{\longrightarrow} D^{n,j}.$$

Dann sind Tot angewandt auf (1) für C und auf (1) für D dieselben Sequenzen in $\mathrm{Ch}^*(R)$. Hat C exakte Zeilen, so ist $((-1)^j d_{D,h}^{n-1,j})_{j\in\mathbb{Z}}\colon D^{n-1,\bullet} \to D^{n,\bullet}$ ein Quasi-Isomorphismus.

(f)* Seien nun $M, N \in \mathrm{Mod}_R$, $P = (P^i)_{i\leq 0} \to M$ eine projektive und $N \to I = (I^i)_{i\geq 0}$ eine injektive Auflösung. Durch Fortsetzung mit 0 in nicht-definierten Graden stellen wir uns P und I als Komplexe in $\mathrm{Ch}^*(R)$ vor. Sei $D \in \mathrm{Ch}^{*,*}(\mathbf{Ab})$ der Doppelkomplex mit $D^{i,j} = \mathrm{Hom}(P^{-i}, I^j)$ und den Differentialen $d_{D,h}^{i,j}$ als Rechtsverkettung mit d_P^{-i-1} und $d_{D,v}^{i,j}$ als Linksverkettung mit d_I^i für $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Sei $D_{P,I} = \mathrm{Tot}\, D$. Dann existieren Quasi-Isomorphismen $\mathrm{Hom}(P,N) \to D_{P,I} \leftarrow \mathrm{Hom}(M,I)$, und insbesondere gilt $\mathrm{Ext}^i(M,N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N)$.
Hinweis: Man überlege, dass sich D durch Ergänzen um eine geeigente Zeile bzw. Spalte in Grad -1 zu einem Doppelkomplex mit exakten Spalten bzw. Zeilen ergänzen lässt.

(g)* Sei $P \to M$ wie in (f), sei zusätzlich $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in Mod_R und $0 \to I' \to I \to I'' \to 0$ eine damit kompatible kurze exakte Sequenz injektiver Auflösungen (horse shoe lemma). Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P,N') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P,N'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{P,I'} \arrow[r] & D_{P,I} \arrow[r] & D_{P,I''} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,I') \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(M,I) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(M,I'') \arrow[r] \arrow[u] & 0,
\end{tikzcd}$$

in dem alle vertikalen Abbildungen Quasi-isomorphismen sind und horizontalen Sequenzen exakt in $\mathrm{Ch}^*(\mathbf{Ab})$ sind.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter

http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/

[3] Für $X \in \mathrm{Ch}^*(R)$ und $n \in \mathbb{Z}$ sei $X[n]$ der Komplex mit $X[n]^i = X^{i+n}$ und $d_{X[n]}^i = (-1)^n d_X^{n+i}$.