Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 5

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 29.05.2018 in den Übungen

---

12. Aufgabe (1+1+2+1+1+1+1+1+2+3 Punkte, Kohomologie und Gruppenextensionen): Sei G eine Gruppe und A ein G-Modul (multiplikativ geschrieben). Für $a \in A$ und $g \in G$ schreiben wir $(g,a) \mapsto a^g$ für die G-Wirkung auf A. Eine Erweiterung von G um A (als abelsche Gruppe mit linearer G-Wirkung) ist eine kurze exakte Sequenz

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1, \qquad (*)$$

so dass $gag^{-1} = a^{p(g)}$ für alle $g \in E$ gilt.[1] Wir schreiben auch (E,i,p) (und nur E wenn eine Verwechselung ausgeschlossen ist) für die Extension. Zwei Extensionen (E,i,p) und (E',i',p') heißen isomorph, wenn ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "p"] & & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & G \arrow[r] & 1 \\ & & E' \arrow[ur, "p'"'] & & \end{tikzcd}$$

existiert; dann ist $h\colon E \to E'$ notwendigerweise ein Gruppenisomorphismus. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation und die Menge aller Isomorpieklassen bezeichnet man mit $\mathrm{Opext}(G,A)$.
Sei nun (E,i,p) gegeben. Ist $s\colon G \to E$ ein mengentheoretischer Schnitt zu p (wir schreiben $s_g := s(g)$ für $g \in G$), so definiert man

$$f_E^s\colon G \times G \to E, (g,g') \mapsto s_g s_{g'} s_{gg'}^{-1}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Abbildung s ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $f_E^s(g,g') = e$ für alle $g,g' \in G$;

(b) Gilt $f_E^s(g,g') \in i(A)$ für alle $g,g' \in G$, und f_E^s definiert ein Element von $Z^2(G,A)$;

(c) Für zwei Schnitte s,s' gilt $f_E^s(f_E^{s'})^{-1} \in B^2(G,A)$; insbesondere definiert das Bild von f_E^s in $H^2(G,A)$ eine Klasse $[f_E]$, welche unabhängig von s ist;

(d) Zwei Extensionen (E,i,p) und (E',i',p') sind genau dann isomorph, wenn gilt $[f_E] = [f'_E]$;

(e) Die kurze exakte Sequenz $(*)$ spaltet genau dann, wenn gilt $[f_E] = 0$.

Im Folgenden definieren wir auf $\mathrm{Opext}(G,A)$ die Struktur einer abelschen Gruppe. Für zwei A-Extensionen (E,i,p) und (E',i',p') von G, sei $E \times_G E' := \{(e,e') \in E \oplus E' \mid p(e) = p'(e')\}$ und $E + E' := (E \times_G E')/\{(i(a),0) - (0,i(a')) \mid a \in A\}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(f) Die Abbildungen $A \to E + E', a \mapsto (i(a),0)$, und $E + E' \to G$, $(e,e') \mapsto g(e)$, machen $E + E'$ zu einer A-Extension von G.

(g) Die Operation $(E,E') \mapsto E + E'$ induziert eine kommutative Operation in $\mathrm{Opext}(G,A)$, *Baersumme* genannt, mit neutralem Element die Klasse von $G \oplus A$. Das Inverse zur Klasse (E,i,p) ist die Klasse von $(E,-i,p)$.

(h) Die Abbildung $\mathrm{Opext}(G,A) \cong H^2(G,A)$, $E \mapsto [f_E]$ ist ein Gruppenisomorphismus.

---

[1] Die Konjugationswirkung $E \to \mathrm{Aut}(A), g \mapsto (a \mapsto gag^{-1})$ ist stets ein Gruppenhomomorphismus, wenn A ein Normalteiler von E ist. Ist A abelsch, so liegt A im Kern der Wirkung und folglich faktorisiert diese über G via p.

Folgern Sie aus (h) die folgende Aussage:

(i) Ist E eine endliche Gruppe und A ein Normalteiler von E, so dass $\mathrm{ggT}(\#A, \#E/A) = 1$. Dann ist G isomorph zu einem semidirekten Produkt $A \rtimes E/A$.
Hinweis: Sei p ein Primteiler von $\#A$, H eine p-Sylow-Untergruppe von A und N der Normalisator von H in E. Man überlege $[E : A] = [N : A \cap N]$. Ist N echt in E enthalten, so zeige man mit Induktion die Existenz einer Spaltung zu $N \to N/A \cap N$. Gilt $E = N$, so überlege man, dass das Zentrum Z von A ein Normalteiler von E ist. Dann wende man Induktion, die Ergebnis des Punktes (h) für Z-Extensionen von E/Z, und folgende Aussage (ohne Beweis): für eine endliche Gruppe G_0 und einen endlichen G_0-Modul A_0 wird die Kohomologiegruppe $H^i(G_0, A_0)$ bei Multiplikation mit $\mathrm{ggT}(\#G_0, \#A_0)$ annuliert.

13. Aufgabe (1+1+1 Punkte, Auflösungen aus (Ko-)Induzierte Moduln): Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Sei A ein G-Modul. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Die $\mathbb{Z}$-linear Abbildung $\mathrm{Ind}_H^G A \to A$ von $g \otimes a \mapsto ga$ (für alle $g \in G$ und $a \in A$) definiert ist einen surjektiven Homomorphismus von G-Moduln.

(b) Die Abbildung $A \to \mathrm{Coind}_H^G A$, $a \mapsto f_a$ mit $f_a(g) = ga$ für alle $g \in G$, ist ein injektiver Homomorphismus von G-Moduln.

(c) Sei G endlich. Konstruieren Sie mit Induktion Auflösungen $P^\bullet \to A$ und $A \to I^\bullet$, so dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ die P^i induzierte und die I^j koinduzierte G-Moduln sind. (Führen Sie die Konstruktion nur für einem der beiden Fälle aus.)

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter
`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`