Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 6

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 05.06.2018 in den Übungen

---

14. Aufgabe (1+2 Punkte, Kohomologie endlicher zyklischer Gruppen): Sei zunächst G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n. Sei $\sigma \in G$ ein Erzeuger, sei N_G wie üblich $\sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}[G]$. Zeigen Sie:

(a) Der Komplex $P^\bullet = P^\bullet_G$ definiert als

$$\ldots \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N_G} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N_G} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G] \to 0$$

ist eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}[G]$-modul. (Der angegebene Komplex ist formal definiert durch $P^i = 0$ für $i > 0$, $P^i = \mathbb{Z}[G]$ für $i \le 0$, $d^i = N_G$ für $i < 0$ gerade, $d^i = (1-\sigma)$ für $i < 0$ gerade und $d^i = 0$ für $i \ge 0$; die Augmentationsabbildung ist die übliche.)

(b) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für den Komplex Q für die Tatekohomologie an, der aus Zusammenfügen von $P^\bullet$ und $(P^\bullet)^*$ entsteht, und zeigen Sie, für jeden G-Modul A,

$$\hat{H}^i(G,A) \cong \hat{H}^0(G,A) \cong A^G/N_G A, \text{ falls } i \in \mathbb{Z} \text{ gerade,}$$
$$H^i(G,A) = \hat{H}^{-1}(G,A) = (\ker N_G : A \to A, a \mapsto N_G a)/I_G A, \text{ falls } i \in \mathbb{Z} \text{ ungerade.}$$

Für die folgenden Aufgaben, definieren wir eine Kategorie von Gruppe-Modul-Paaren. Die Objekte sind Paare (G,A) bestehend aus einer Gruppe G und einem G-Modul A. Morphismen $(G,A) \to (G',A')$ sind Paare von Morphismen $\rho\colon G' \to G$ (von Gruppen) und Morphismen $\lambda\colon A \to A'$ von abelschen Gruppen, so dass $g'\lambda(a) = \lambda(\rho(g')a)$ für alle $a \in A$ und $g' \in G'$ gilt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jeder Morphismus von Gruppe-Modulpaaren Abbildungen $H^i(\rho,\lambda)\colon H^i(G,A) \to H^i(G',A')$ auf der Kohomologie definiert.

15. Aufgabe (1+1+2 Punkte, Kohomologie und Gruppe-Modul-Paare): Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Abbildung $H^i(\rho,\lambda)$ wird induziert von $\phi^i\colon C^i(G,A) \to C^i(G',A'), f \mapsto \phi^i(f)$ mit $\phi^i(f)'(g'_1,\ldots,g'_i) = (\lambda \circ f)(\rho(g'_1),\ldots \rho(g'_i))$; insbesondere ist $(\phi^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ein Morphismus in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$.

(b) Seien $(\rho,\lambda)\colon (G,A) \to (G',A')$ und $(\rho',\lambda')\colon (G',A') \to (G'',A'')$ Morphismen von Gruppe-Modulpaaren. Sei $(\rho'',\lambda'')\colon (G,A) \to (G'',A'')$ deren Verkettung. Dann gilt

$$H^i(\rho'',\lambda'') = H^i(\rho',\lambda') \circ H^i(\rho,\lambda).$$

(c) Sei (ρ,λ) das Paar zur kanonischen Inklusion $\rho\colon H \to G$ einer Untergruppe und $\lambda = \mathrm{id}_A$. Sei $\iota\colon A \to \mathrm{Coind}_H^G A$ wie in Aufgabe 13(b) und $s_A\colon H^i(G,\mathrm{Coind}_H^G A) \to H^i(H,A)$ der Isomorphismus aus dem Shapiro Lemma. Dann ist $H^i(\rho,\lambda)$ gleich der Verkettung von $H^i(G,\iota)$ mit s_A. **Hinweis:** Berechnen Sie die Kohomologie mir der Standardauflösung und schreiben Sie den Isomorphismus aus dem Shapiro Lemma explizit hin.

16. Aufgabe (1+1+1+1 Punkte, Konjugation auf Kohomologiegruppen): Sei G eine Gruppe, N eine Untergruppe von G und A ein G-Modul. Für $g \in G$, war in der Vorlesung eine Abbildung $g^* : H^i(N,A) \to H^i(gNg^{-1},A)$ definiert (sie ist von g-Konjugation $gNg^{-1} \to N$ und $A \to A, a \mapsto g.a$ durch Funtorialität induziert). Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für alle $g_1, g_2 \in G$ hat man $(g_1g_2)^* = g_1^* \circ g_2^*$ (erläutern Sie auch die Bedeutung des Ausdrucks auf der rechten Seite.)

(b) Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine exakte Sequenz in Mod_G, so gilt $\partial^i_{gHg^{-1}} \circ g^* = g^* \circ \partial^i_H$ für die Verbindungshomomorphismen $\partial^i_H \colon H^i(H, A'') \to H^{i+1}(H, A')$.

(c) Ist N ein Normalteiler, so definiert $g \to \mathrm{Aut}(H^i(N, A))$, $g \mapsto g^*$ eine Gruppenwirkung von G auf $H^i(G, A)$, und für diese gilt $g^* = \mathrm{id}$ für alle $g \in N$. **Hinweis:** Dimensionsverschiebung.

(d) Konjugation kommutiert mit Restriktion: für Untergruppen $K \subset H$ von G gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^i(H,A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "g^*"] & H^i(K,A) \arrow[d, "g^*"] \\ H^i(gHg^{-1},A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^i(gKg^{-1},A). \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist für Normalteiler $N \subset G$ das Bild der Restriktion $H^1(G, A) \to H^1(N, A)$ im $\mathbb{Z}$-Untermodul $H^1(N, A)^{G/A}$ enthälten.

17. Aufgabe (2+1+1+1 Punkte, Inflations-Restriktions-Sequenz): Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Für $k \geq 0$ hat man Abbildungen $\mathrm{Inf} : H^k(G/N, A^N) \to H^k(G, A)$ (Inflation, induziert von $G \to G/N$ und $A^N \hookrightarrow A$) und $\mathrm{Res} : H^k(G, A) \to H^k(N, A)^{G/N}$ (Restriktion, wie in 16(d) konstruiert). Zeigen Sie:

(a) Die Sequenz

$$0 \to H^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(N, A)^{G/N}$$

ist exakt. **Hinweis:** Verwenden Sie die expliziten Beschreibungen aus 15(a).

Für (b)-(d) nehmen wir $H^i(N, A) = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$ an.

(b) Betrachten sie die kurze exakte Sequenz $0 \to A \to \mathrm{Coind}_1^G A \to A^* \to 0$. Für $i = 1, \dots, n-1$ sind die Verbindungshomomorphismen $H^{i-1}(G/N, (A^*)^N)^{G/N} \to H^i(G/N, A^N)^{G/N}$, $H^{i-1}(G, A^*) \to H^i(G, A)$ und $H^{i-1}(N, A^*) \to H^i(N, A)$ bijektiv.
Hinweis: Für die erste Aussage, erhält man durch den Funktor der N-Invarianten eine kurze exakte sequenz $0 \to A^N \to (\mathrm{Coind}^G A)^N \to (A^*)^N \to 0$. Man wende dann $H^\bullet(G/N, \cdot)$ an und verwende $(\mathrm{Coind}^G A)^N = \mathrm{Coind}^{G/N} A$.

(c) Für alle $i \in \{2, \dots, n-1\}$ ist die folgende Sequenz exakt

$$0 \to H^{i-1}(G/N, (A^*)^N) \to H^{i-1}(G, A^*) \to H^{i-1}(N, A^*)^{G/N} = 0 \qquad (1)$$

Hinweis: Für $i = 2$ folgt dies aus (a). Für $i > 2$ argumentiert man mit Induktion.

(d) Die folgende Sequenz ist exakt:

$$0 \to H^n(G/N, A^N) \to H^n(G, A) \to H^n(N, A)^{G/N} \qquad (2)$$

Hinweis: Man konstruiere ein kommutatives Diagramm mit Zeilen (1) und (2), und verwende die Isomorphismen aus (b) als vertikalen Abbildungen.

Bemerkung: Man kann die exakte Sequenz in (1) erweitern zu einer exakten Sequenz

$$0 \to H^1(G/N, A^N) \to H^1(G, A) \to H^1(N, A)^{G/N} \to H^2(G/N, A^N) \to H^2(G, A).$$

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter
`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`