Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 7

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 12.06.2018 in den Übungen

Für Komplexe C, D in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$ sei $C \otimes D := A$ der Doppelkomplex mit $A^{i,j} = C^i \otimes_{\mathbb{Z}} D^j$, mit horizontalem Differential $d_h^{i,j} = d_C^i \otimes \mathrm{id}$ mit vertikalem Differential $d_v^{i,j} = \mathrm{id} \otimes d_D^j (-1)^i$ und $C \boxtimes D := \operatorname{Tot} C \otimes D$ in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$.

18. Aufgabe (1+1+3+1 Punkte, Künnethformel für Komplexe): Seien C, D Komplexe in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$. Wir nehmen an, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $\{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i + j = k, C^i \neq 0 \text{ und } D^j \neq 0\}$ endlich ist, und dass alle C^i torsionsfrei sind.
Sei $Z \in \mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$ der Komplex mit $Z^i(C)$ in Grad i und allen Differentialen Null und sei B' der Komplex mit $B^{i+1}(C)$ in Grad i und allen Differentialen Null. Seien weiter $Z \to C$ und $C \to B'$ die offensichtlichen Morphismen in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$ (der erster ist Inklusion un der zweiter ist induziert von den Differentialen auf C). Seien $H(C)$ und $H(D)$ die Komplexe mit $H^i(D)$ in Grad i und allen Differentialen Null. Zeigen Sie:

(a) Die Sequenz $0 \to Z \to C \to B' \to 0$ in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$ ist exakt, und alle darin auftretenden $\mathbb{Z}$-Moduln sind torsionsfrei.

(b) Die von der Sequenz in (a) induzierten Sequenzen $0 \to Z \otimes D \to C \otimes D \to B' \otimes D \to 0$ von Doppelkomplexen bzw. (†) $0 \to Z \boxtimes D \to C \boxtimes D \to B' \boxtimes D \to 0$ in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$ sind exakt.

(c) Die lange exakte Kohomologiesequenz zu (†) ist von der Form

$$\ldots \to H^n(C \boxtimes D) \to H^n(B' \boxtimes H(D)) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(Z \boxtimes H(D)) \to H^{n+1}(C \boxtimes D) \to H^{n+1}(B' \boxtimes H(D)) \to \ldots;$$

dabei ist ∂ induziert von der (gradweisen) kanonischen Inklusion $(B') \to Z$, und man hat eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Tot}^{n+1}(\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^i(C), H^j(D))_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}) \to H^n(B' \boxtimes H(D)) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H^{n+1}(Z \boxtimes H(D)) \to \operatorname{Tot}^{n+1}(H(C) \boxtimes H(D)) \to 0,$$

wobei im (inneren) Doppelkomplex links alle Differentiale Null sind. **Hinweis:** $B'[-1] \to Z \to 0$ ist eine flache Auflösung von $H(C)$ (eine flache Auflösung in $\mathrm{Ch}^*(\mathbb{Z})$ ist eine Auflösung aus Komplexe, deren Einträge flache $\mathbb{Z}$-Moduln sind).

(d) Es gilt die Künnethformel, d.h. man hat folgende (nicht-kanonische spaltende) exakte Sequenz für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H^i(C) \otimes H^j(D) \to H^n(C \boxtimes D) \to \bigoplus_{i+j=n+1} \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^i(C), H^j(D)) \to 0.$$

Bemerkung: Anstelle von $\mathbb{Z}$ könnte man einen beliebigen Hauptidealring nehmen.

19. Aufgabe (1+1+1 Punkte, Kohomologie des Produkts von Gruppen): Sei $G = G_1 \times G_2$ das Produkt von Gruppen G_1 und G_2. Sei $P_i^\bullet$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ als G_i-Modul. Sei A_i ein G_i-Modul, $i = 1, 2$, und sei A_1 $\mathbb{Z}$-torsionsfrei (also insbesondere $A_1 = A_2 = \mathbb{Z}$ dem trivialen Modul). Zeigen Sie:

(a) Die Einträge von $P_1 \otimes P_2$ sind projektive G-Moduln und $P_1^\bullet \boxtimes P_2^\bullet := \operatorname{Tot} C$ ist eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

(b) Man hat einen Isomorphismus von Doppelkomplexen

$$\mathrm{Hom}_{G_1}(P_1, A_1) \otimes \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, A_2) \cong \mathrm{Hom}_G(P_1 \otimes P_2, A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2).$$

(c) Es gibt eine kurze, (nicht-kanonisch spaltende) exakte Sequenz

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H^i(G_1, A_1) \otimes H^j(G_2, A_2) \to H^n(G, A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2) \to \bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^i(G_1, A_1), H^j(G_2, A_2)) \to 0.$$

Bemerkung: Kombiniert man Teil (a) mit Aufgabe 14, so kann man für beliebige endliche Abelsche Gruppen G einfache projektive Auflösungen von $\mathbb{Z}$ als G-Modul angeben.

20. Aufgabe (1+1+1 Punkte, Über $\mathbb{F}_p[G]$-Moduln): Sei G eine (endliche) p-Gruppe, seien A, B, C drei $\mathbb{F}_p[G]$-Moduln und sei $\phi\colon A \to B$ ein Morphismus von $\mathbb{F}_p[G]$-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Ist $C \neq 0$, so ist $C^G \neq 0$.
Hinweis: Ist $0 \neq c \in C$, so analysiere man die Bahnlängen der Operation von G auf dem endlichen G-Untermodul $\mathbb{F}_p[G]c$.

(b) Ist $C \neq 0$, so ist $C_G \neq 0$. **Hinweis:** Man überlege $C^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(C_G, \mathbb{F}_p)$.

(c) Ist die von ϕ induzierte Abbildung $\bar{\phi}\colon A_G \to B_G$ surjektiv, so auch ϕ.

21. Aufgabe (1+2+1 Punkte, Kohomologie endlicher zyklischen Gruppen II): Sei G eine zyklische endliche Gruppe der Ordnung n und $A \in \mathrm{Mod}_G$. Zeigen Sie:

(a) $\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) = H_1(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n \cong G$.

(b) Sei u_g ein Erzeuger von G, betrachtet als Element in $\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z})$ nach (a). Dann ist

$$\hat{H}^i(G, A) \to \hat{H}^{i-2}(G, A), \alpha \mapsto u_g \cup \alpha$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.
Hinweis: Die kurzen exakten Sequenzen (1) $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ und (2) $0 \to \mathbb{Z} \stackrel{1 \mapsto N_G}{\to} \mathbb{Z}[G] \to I_G \to 0$ induzieren (nach Tensorieren mit A) Randabbildungsisomorphismen $H^{i-2}(G, A) \stackrel{\partial_1^{i-2}}{\to} H^{i-1}(G, A \otimes I_G) \stackrel{\partial_2^{i-1}}{\to} H^i(G, A)$ (und analog für $A = \mathbb{Z}$); daher genügt es zu zeigen, dass $\partial_2^{i-1}\partial_1^{i-2}(u_g \cup \alpha) = \alpha$ gilt.

(c) Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine exakte Sequenz in Mod_G, so induziert diese eine zyklische 6-Termsequenz

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^0(G, A) \arrow[r] & \hat{H}^0(G, B) \arrow[r] & \hat{H}^0(G, C) \arrow[d, "\partial"] \\
\hat{H}^1(G, C) \arrow[u, "u_g \cup (\partial \cdot)"] & \hat{H}^1(G, B) \arrow[l] & \hat{H}^1(G, A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/