Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 8

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 19.06.2018 in den Übungen

---

22. Aufgabe (1+1+1+1 Punkte, Kohomologie endlicher zyklischen Gruppen III): Sei G eine zyklische endliche Gruppe der Ordnung n und $A \in \mathrm{Mod}_G$. Zeigen Sie:

(a) Definiert man $h^i(G,A) = \#\hat{H}^i(G,A)$, $i = 0,1$ und $h(G,A) = h^0(G,A)/h^1(G,A)$ falls Nenner und Zähler endlich sind, so gilt unter dieser Endlichkeitsvorausstzung $h(G,A)h(G,C) = h(G,B)$ für die Sequenz aus (c).

(b) Ist A endlich erzeugter G-Modul, so sind $h^i(G,A)$ endlich, ist A endlich, so gilt $h(G,A) = 1$.

(c) Ist $0 \to A_0 \to A_1 \to \ldots \to A_k \to 0$ eine exakte Sequenz von G-Moduln, für welche $h(G,A_i)$ definiert ist, so gilt $\prod h(G,A_i)^{(-1)^i} = 1$.

(d) Ist $\phi\colon A \to B$ ein Morphismus in Mod_G mit endlichem Kern und Kokern, und ist $h(G,A)$ definiert, so ist $h(G,B)$ definiert und es gilt $h(G,A) = h(G,B)$.

23. Aufgabe (2+2 Punkte, Erste Homologie): Sei G eine Gruppe, $B \in \mathrm{Mod}_G$ und $I_G \subset \mathbb{Z}[G]$ das Augmentationsideal. Zeigen Sie:

(a) $I_G/I_G^2 \cong G^{\mathrm{ab}}$.
Hinweis: Überlegen Sie, dass es eine Abbildung $\psi\colon I_G \to G^{\mathrm{ab}}$ gibt welche $g-1$ auf $\overline{g} := g[G,G]$ abbildet und suchen Sie eine inverse Abbildung für ψ.

(b) $H_1(G,B) \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} I_G/I_G^2$, und insbesondere $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G^{\mathrm{ab}}$.
Hinweis: Tensorieren Sie $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 1$ mit B und wenden Sie Homologie an. Dann Schauen Sie, dass $B \otimes_{\mathbb{Z}} I_G^2$ der Kern von der natürlichen Abbildung $B \otimes_{\mathbb{Z}} I_G \to B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G$ ist.

24. Aufgabe (1+1+2 Punkte, Berechnung des Verlagungshomomorphismus): Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von endlichem Index von G. Nach 23(b) induziert die Restriktion $H_1(G,\mathbb{Z}) \to H_1(H,\mathbb{Z})$ einen sogenannten *Verlagerungshomomorphismus* $\mathrm{Ver}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$. Wir berechnen ihn explizit. Zeigen Sie hierzu:

(a) Man hat $H_0(H,I_G) = I_G/I_GI_H$, und das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
H_1(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & H_0(G,I_G) \arrow[r, "="] \arrow[d, "N_{G/H}"] & I_G/I_G^2 \\
H_1(H,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & H_0(H,I_G) \arrow[r, "="] & I_G/I_GI_H,
\end{tikzcd}$$

wobei $N_{G/H}$ die Norm von G/H ist und die Verbindungshomomorphismen aus der exakten Sequenz $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 1$ kommen.

(b) Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
H_1(H,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & I_G/I_GI_H \\
H_1(H,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "\mathrm{Id}"] & I_H/I_H^2 \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

und mit 23(a) ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} G^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Ver}"] & I_G/I_G^2 \arrow[r, "N_{G/H}"] & I_G/I_G I_H \\ H^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\cong"] & I_H/I_H^2 \arrow[ur, "\pi"] & \end{tikzcd},$$

(c) Sei $\theta\colon H\backslash G \to G$ ein mengentheoretisches Schnitt. Für $s \in G$ und $t \in H\backslash G$, gibt es ein eindeutiges Element $x_{s,t}$ von H so dass $\theta(t)s = x_{t,s}\theta(ts)$ gilt. Dann ist Ver die Abbildung $G \to H, s \mapsto \overline{\prod_{t\in H\backslash G} x_{s,t}}$. **Hinweis:** Man berechne explizit die Normabbildung und verwende das zweite Diagramm aus (b).

25. Aufgabe (2 Punkte, Explizite Berechnung von Cup Produkte): Sei G eine endliche Gruppe und A ein G-Modul. Sei a ein Element von A^G (bzw. $a \in \ker(N_G\colon A \to A)$), und bezeichne $\overline{a}^0$ (bzw. $\overline{a}_0$) sein Bild in $\hat{H}^0(G,A)$ (bzw. $\hat{H}^{-1}(G,A)$). Sei $f\colon G \to A$ ein 1-Kozykel und $u\colon G \times G \to A$ ein 2-Kozykel mit Kohomologieklassen $\overline{f} \in H^1(G,A)$ und $\overline{u} \in H^2(G,A)$. Wir schreiben $\bar{s}$ für das Bild von $s \in G$ unter der Abbildung $G \to G^{\mathrm{ab}} \cong \hat{H}^{-2}(G,A)$ nach 23(a).

Zeigen Sie: Für alle $s \in G$ gilt $\bar{s} \cup \overline{u} = \overline{\sum_{s\in G} u(t,s)}^0$. **Hinweis:** Betrachte $0 \to A \to \mathrm{Coind}_1^G A \to A^* \to 0$. Sei $f \in Z^1(G,A^*)$ mit $\partial f = u$; verwende $\bar{s} \cup \overline{f} = \overline{f(s)}_0$ für $s \in G$ aus der Vorlesung gezeigt; zeige, dass $\partial\overline{f(s)}_0$ durch die Norm berechnet werden kann.

26. Aufgabe (1+1 Punkte, Restriktion und Corestriktion auf Klassenformationen): Sei K ein Körper und (A, inv) eine Klassenformation für K. Zeigen Sie:

(a) Für endliche separable Erweiterungn L/E von K ist $\mathrm{Res}_{L/E}\colon H^2(E,A) \to H^2(L,A)$ surjektiv. **Hinweis:** Verwenden Sie, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ divisibel ist und dass $\mathrm{inv}_L \circ \mathrm{Res}_{L/E} = [L\colon E]\mathrm{inv}_E$.

(b) Für endliche separable Erweiterungn L/E von K ist $\mathrm{Cores}_{L/E}\colon H^2(L,A) \to H^2(E,A)$ injektiv. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass $\mathrm{inv}_E \circ \mathrm{Cores}_{L/E} = \mathrm{inv}_L$: man schreibt die Verkettung mit $\mathrm{Res}_{L/E}$ und verwendet $\mathrm{Cores}_{L/E} \circ \mathrm{Res}_{L/E} = [L\colon E]$.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter
`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`