Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 9

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti

Besprechung: Di 26.06.2018 in den Übungen

Sei K ein Körper. Wie in der Vorlesung bezeichne $\mathcal{F}_K^{\mathrm{sep}}$ die Menge aller endlichen separablen Körpererweiterungen L von K und $\mathcal{G}_K \subset \mathcal{F}_K^{\mathrm{sep}}$ die Teilmenge aller solchen L, die zusätzlich Galoissch über K sind.

27. Aufgabe (1+1+1+2 Punkte, Normgruppen): Sei (A, inv) eine Klassenformation zu K; sei $\mathcal{N}_L := N_{L/K}A_L$ die Normgruppe zu $L \in \mathcal{F}_K^{\mathrm{sep}}$. Zeigen Sie:

(a) Für $L, L' \in \mathcal{G}_L$ gilt $\mathcal{N}_{LL'} = \mathcal{N}_L \cap \mathcal{N}_{L'}$.

(b) Für $L, L' \in \mathcal{G}_L$ gilt $\mathcal{N}_L \subset \mathcal{N}_{L'} \iff L \supset L'$.

(c) Für $L, L' \in \mathcal{G}_L$ gilt $\mathcal{N}_{L\cap L'} = \mathcal{N}_L + \mathcal{N}_{L'}$.

(d) Die Zuordnung $L \to \mathcal{N}_L$ definiert eine Bijektion

$$\{L \in \mathcal{G}_K \mid \mathrm{Gal}(L/K) \text{ ist abelsch}\} \longrightarrow \{N \subset A_K \mid N \text{ ist Normgruppe}\},$$

und es gilt: Ist $N \subset A_K$ eine Untegruppe, welche eine Normgruppe enthält, so ist N eine Normgruppe.

Hinweis zu (a-d): Die folgenden Aussagen der Vorlesung könnten von Nutzen sein:
(a) Der Index $[A_K \colon N_L]$ teilt $[L \colon K]$, und es gilt Gleichheit genau dann, L eine Abelsche Erweiterung von K ist. (b) Ist $E \subset L$ die maximale abelsche Erweiterung von K, so gilt $\mathcal{N}_L = \mathcal{N}_E$.

28. Aufgabe (1+1+3+1+1 Punkte, Klassenformation für endliche Körper): Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist K ein Körper, so gibt es natürliche Isomorphismen

$$\iota_K \colon H^2(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

(b) Ist K ein endlicher Körper, so ist die Abbildung

$$\mathrm{eval}_K \colon \ \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, f \mapsto f(\mathrm{Fr}_K),$$

ein Isomorphismus, wobei Fr_K der Frobeniusautomorphismus $K^{\mathrm{alg}} \to K^{\mathrm{alg}}, \alpha \mapsto \alpha^{\#K}$ ist.

Für jeden endlichen Körper definieren wird $\mathrm{inv}_L \colon H^2(L, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als die Verkettung $\mathrm{eval}_L \circ \iota_L$. Sei ab nun K ein endlicher Körper und sei $A := \mathbb{Z}$ der diskrete triviale G_K-Modul und sei $L \in \mathcal{G}_K$.

(c) $(\mathbb{Z}, \mathrm{inv})$ ist eine Klassenformation.

(d) Für $M \in \mathcal{G}_L$ ist die Norm $N_{M/L} \colon A_M \to A_L$ die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto [M : L]n$. Sie hat kompakten Kern und offenes Bild. Die universelle Normgruppe $D_L = \bigcap_{M \in \mathcal{G}_L} N_{M/L}A_L$ ist trivial.

(e) Für p eine Primzahl und $\phi_{L,p} \colon A_L \to A_L, a \mapsto pa$ ist der $\mathrm{Kern}(\phi_{L,p})$ kompakt und es gilt $\mathrm{Bild}(\phi_{L,p}) \supset D_L$. Jede Untergruppe von A_L von endlichem Index ist eine Normgruppe.

Bemerkungen:
(i) Die Teile (c)–(e) zeigen, dass (A, inv) eine topologische Klassenformation für K ist.
(ii) Eine weitere und oft verwendete Normalisierung in (b) ist durch $f \mapsto f(\mathrm{Fr}_K^{-1})$ gegeben.
(iii) Es gelten Aussagen analog zu (c)–(e) für beliebige Körper mit absoluter Galoisgruppe $\hat{\mathbb{Z}}$.

29. Aufgabe (2+1+1 Punkte, Nicht-abelsche Kohomologie): Sei G eine Gruppe. Unter einer G-Gruppe verstehen wir eine *nicht-notwendig abelsche* Gruppe A mit Einheit e und mit einer Gruppenwirkung $G \to \mathrm{Aut}(A)$. Ein Morphismus von G-Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus kompatibel mit der G-Wirkung. Wir schreiben die Verknüpfung in A multiplikativ und die Wirkung $G \times A \to A$ als $(g, a) \mapsto {}^g a$. Eine punktierte Menge ist ein Paar (X, x) bestehend aus einer Menge X und einem Element $x \in X$; ein Morphismus $(X, x) \to (Y, y)$ punktierter Mengen ist eine Abbildung $\phi\colon X \to Y$ mit $\phi(x) = y$; eine Sequenz punktierter Mengen $(X, x) \xrightarrow{m} (Y, y) \xrightarrow{n} (Z, z)$ heißt exakt an Y, wenn $m(X) = n^{-1}(\{z\})$ gilt.

Für $i = 0, 1$ definiert man die (nicht-abelsche) Kohomologie $H^i(G, A)$ folgendermaßen als *punktierte Menge*: man definiert $H^0(G, A)$ als (A^G, e); man nennt eine Abbildung $f\colon G \to A$ einen 1-Kozykel, wenn $f(st) = f(s) \cdot {}^s f(t)$ für alle $s, t \in G$ gilt; zwei 1-Kozykel f, f' heißen äquivalent, wenn ein $a \in A$ existiert, sodass $f'(s) = a^{-1} \cdot f(s) \cdot {}^s a$ für alle $s \in G$ gilt; man definiert $H^1(G, A)$ als die punktierte Menge der Äquivalenzklassen von 1-Kozykeln, mit der Klasse der trivialen Abbildung als ausgezeichnetem Element. Jeder Homomorphismus $\phi\colon A \to B$ von G-Gruppen induziert Abbildungen punktierter Menge $H^i(\phi)\colon H^i(G, A) \to H^i(G, B)$ für $i = 0, 1$.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $1 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 1$ eine kurze exakte Sequenz nicht-notwendig abelscher Gruppen, so gibt es einen Verbindungshomomorphismus punktierter Menge $\partial_1\colon C^G \to H^1(G, A)$ so dass die Sequenz

$$1 \to A^G \xrightarrow{H^0(i)} B^G \xrightarrow{H^0(p)} C^G \xrightarrow{\partial_1} H^1(G, A) \xrightarrow{H^1(i)} H^1(G, B) \xrightarrow{H^1(p)} H^1(G, C)$$

exakt ist. **Hinweis:** Man definiert ∂_1 wie im abelschem Fall (man bemerkt, dass die abelsche Voraussetzung auf A unnötig ist). Man kann Exaktheit explizit verifizieren.

(b) Liegt A im Zentrum von B, so betrachte man $H^2(G, A)$ als punktierte Menge mit 0 als ausgezeichnetem Element. In diesem Fall kann die Konstruktion des Verbindungshomomorphismus aus dem abelschen Fall adaptiert werden, um einen Homomorphismus punktierter Mengen $\partial_2\colon H^1(G, C) \to H^2(G, A)$ zu erhalten.

(c) Unter der Voraussetzung von (b) ist auch die um ∂_2 verlängerte Sequenz exakt.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter

`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`