Sommersemester 2019

Kompatible Systeme von Galoisdarstellungen (MM31)

Prof. Gebhard Böckle

Objekte M der Arithmetischen Geometrie über einem Zahlkörper F, wie etwa Elliptische Kurven, Abelsche Varietäten, Elliptische, Hilbertsche oder Siegelsche Modulformen haben verschiedene "Realisierungen". Ihre "étale Realisierung" führt auf sogenannten (n-dimensionale) kompatible Systeme $(\rho_{M,\ell})$ von Galoisdarstellungen, wobei ℓ alle Primzahlen durchläuft. Jedes $\rho_{M,\ell}$ ist ein stetiger Homomorphismus $\rho_{M,\ell}\colon \Gamma_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$, wobei $\mathbb{Q}_\ell$ die ℓ-adische Komplettierung von $\mathbb{Q}$ und $\bar{F}$ der algebraische Abschluss von F sind.

Die Kompatibilität führt dazu, dass viele Eigenschaften der Darstellungen $\rho_{M,\ell}$ unabhängig von ℓ sind. Insbesondere stellt sich die Frage, ob dies für die Monodromiegruppe G_ℓ gilt; hierbei ist G_ℓ der Zariski-Abschluss $\overline{\rho_{M,\ell}(\Gamma_F)} \subset \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}_\ell}$. Gibt es eine algebraische Gruppe $G_M \subset \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$ über $\mathbb{Q}$, so dass für alle Primzahlen ℓ die Gruppen G_ℓ und $G_M \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ isomorph sind?

Auf Mumford und Tate geht die Konstruktion eines Kandidaten für die Einskomponente G_M^o von G_M zurück, der sogenannten Mumford-Tate Gruppe MT_M zu M. Diese wird mittels der Theorie der Tannakakategorien aus einer anderen Realisierung von M konstruiert, nämlich der $\mathbb{Q}$-Hodge Struktur zu M. Die Gruppe MT_M ist eine reduktive Gruppe über $\mathbb{Q}$. Sofern MT_M über $\mathbb{Z}$ definiert, halbeinfach und einfach zusammenhängend ist, gelten folgenden Vermutungen:

(i) Es gibt einen Isomorphismus $\iota_\ell\colon \mathrm{MT}_M \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\simeq} G_\ell^o$.

(ii) Die Gruppen $\rho_{M,\ell}(\Gamma_F)$ und $\mathrm{MT}_M(\mathbb{Z}_\ell)$ sind unter ι_ℓ kommensurabel in $\mathrm{MT}_M(\mathbb{Q}_\ell)$.

(ii) Die Gruppen $(\prod_\ell \rho_{M,\ell})(\Gamma_F)$ und $\mathrm{MT}_M(\widehat{\mathbb{Z}})$ sind unter $\prod_\ell \iota_\ell$ kommensurabel in $\mathrm{MT}_M(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

Wesentliche Themen der Vorlesung werden sein:

- Kompatible System und die (vermuteten) Unabhängigkeiten von ℓ.
- Tannaka-Kategorien.
- $\mathbb{Q}$-Hodge-Strukturen und die Konstruktion von MT_M.
- Bekannte Resultate und Vermutungen über die Mumford-Tate Vermutung, insbesondere für Elliptische Kurven und Abelsche Varietäten.

Vorkenntnisse: Die Vorlesung benötigt elementare Vorkenntnisse in Algebraischer Geometrie (Varietäten) oder Algebraischen Gruppen sowie vertiefte Kenntnisse in Algebraischer Zahlentheorie.

Termine: Vorlesung: Di 11-13, Do 9-11, SR 4, Übungen Di 16-18, SR 2

Vorlesungsbeginn: Di 16.4.2019

Kontakt: gebhard.boeckle@iwr.uni-heidelberg.de