Universität Duisburg-Essen SS 2006

Arbeitsgemeinschaft
Einführung in die Theorie der Automorphen Formen

Organisation: Pedro Luis del Angel, Gebhard Böckle, Juan Cerviño, G. Wiese, Do 10–12 c.t. T03R03D39

Seminarprogramm

Im optimistischsten Fall hat das Seminars die folgenden Ziele:

(1) Beschreibung des Übergangs von klassischen (kuspidalen Hecke-Eigen-) Modulformen f zu adelischen automorphen Formen und automorphen Darstellungen π_f.

(2) Beschreibung der automorphen Darstellungen für $\mathrm{GL}_2(K)$, K ein lokaler Körper, und Beschreibung der Faktoren π_v in $\pi_f = \otimes_v \pi_v$ an 'unverzweigten' Stellen v durch lokale Eigenschaften der Spitzenform f.

(3) Die Spurformel für kompakte Quotienten $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.

(4) Die Spurformel für $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ für Kongruenzuntergruppen und die JL-Korrespondenz zwischen GL_2 und der Einheitengruppe von Quaternionenalgebren über $\mathbb{Q}$.

Klassische und adelische Automorphe Formen, Automorphe Darstellungen und deren globale Theorie

05.04.07 **1. Klassische und automorphe Formen und Darstellungen**

Dieser Vortrag könnte sich an [Ro2], §1, orientieren. Sei ω eine Heckecharakter von $\mathbb{Q}$. Zunächst wird für $G = \mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ die unitäre Darstellung von $G(\mathbb{A})$ auf $L^2(\omega) := L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \omega)$ eingeführt, sowie die Unterdarstellung $L^2_0(\omega)$ auf *kuspidalen* Funktionen. Sei weiter $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ diskrete, so dass $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ein endliches Volumen besitzt. So kann man $L^2(\Gamma)$ als Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ betrachten. Für $\Gamma = \Gamma_1(N)$ erhält man eine Abbildung $L^2_\omega(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\omega)$. Diese erhält Kuspidalität. Klassiche Modulformen lassen sich nun einfach so twisten, dass sie in $L^2_\omega(\Gamma)$ zu liegen kommen. Auf dem Hilbertraum $L^2(\omega)$ kann man simultan die Theorie selbstadjungierter Operatoren sowie die Theorie (unendlichdimensionaler) Darstellungen von GL_2 betrachten.

Als weiteres soll noch die algebraische Versionen von $L^2_0(\omega)$ eingeführt, werden, d.h. den Raum $\mathcal{A}_0(\omega)$ der **kuspidale automorphe Formen**. Dieser wird insbesondere in Bumps Buch, [Bu], ausführlich untersucht. Hierzu benötigt man den Laplace-Operator auf $G(\mathbb{R})$, sowie das Konzept der 'K-Endlichkeit' – welches von der Wahl einer Maximal-kompakten Untergruppe von $G(\mathbb{R})$ abhängt.

Es können nun die Inhalte einiger der Vorträge erläutert werden. Stichworte sind: Die Zerlegung von $L^2_0(\omega)$ als direkte Summe irreduzibler (und Konsequenzen für $\mathcal{A}_0(\omega)$). Glatte und Zulässige Darstellungen und Heckealgebren. Der Tensorproduktsatz. Multiplizität Eins und Whitakkermodelle. Die Zerlegung von $L^2(\omega)$ und Eisensteinreihen. Eine Andeutung der Spurformel.

Als Vorbereitung sollten kurz wiederholt werden: Die starke Approximation für $(\mathbb{A}, +)$ und für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, sowie Heckecharaktere.

Weitere Literatur findet sich in [Co1], Lectures 1–4 (eine weiter gute Übersicht), [Bu], [Ge] und [Ku]. Ein motivierter Zugang zum Übergang von Modulformen zu automorpen Formen findet sich in [De], Ch.1-2.

N.N

12.04.07 **2. Die vollständige Reduzibilität von $L_0^2(\omega)$ und $\mathcal{A}_0(\omega)$, und die diskreten Reihen als Beispiel von Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$**

Zunächst sollte die Universelle einhüllende der Lie-Algebra $U(\mathfrak{g})$ von $G(\mathbb{R})$ besprochen werden (als Raum invarianter Differentialoperatoren), und damit die lokale Hecke-Algebra an ∞ definiert werden ([Bu], S. 310-312, §2.2). Sie ist eine Tensorprodukt von $U(\mathfrak{g})$ und $C^\infty(G(\mathbb{R})//K_\infty)$. Die Operatoren aus $C^\infty(G(\mathbb{R})//K_\infty)$ sind kompakt und selbstadjungiert auf dem Hilbertraum $L_0^2(\omega)$, [Bu], §2.3. Wesentliche Aussagen sind [Bu], Theorem 3.3.4, Theorem 3.3.2 und Theorem 3.2.2. Die knappere aber lückenhafte Darstellung in [Bu2], §1,2, ist zu Beginn sicher besser lesbar.

Im zweiten Teil des Vortrages soll noch ein Teil der Darstellungstheorie von $G(\mathbb{R})$ dargestellt werden – etwa im Umfang von [Ro2], S16–17. Man interpretiere Formel 2.3 aus [Ro2], für klassische Modulformen und deren Darstellungen.

N.N

19.04.07 **3. Grundlagen der Darstellungstheorie von $G(\mathbb{Q}_p)$**

Der erste und umfangreichere Teil des Vortrages kann siche an [Ro1], S.1–5, orientieren. Alle Ergebnisse hieraus sollen dargestellt werden – Beweise soweit sinnvoll. Vieles findet sich auch in [Bu], §4.2 und 4.5. Es wäre gut, kurz die Darstellungstheorie einer kompakten Topologischen Gruppe zu wiederholen – falls dies nicht bereits im vorigen Vortrag geschehen war, [Bu], Theorem 2.4.1, Prop. 4.2.2 . (Man bemerke: Für Modulformen sind alle bis auf endliche viele Faktoren der zugehörigen Darstellung unverzweigte Hauptreihendarstellungen.) Zusätzlich sollten die Aussagen über unverzweigte Darstellungen in [Ro1], S.21–22, bis einschließlich Korollar 29 dargestellt werden. (S. auch [Bu], Theorem 4.6.1.) Zum Abschluss sollte noch erklärt werden, warum die übliche Heckeoperation von T_p auf Modulformen mit der neu definierten auf automorphen Formen übereinstimmt, s. [Ro2], Lemma 2.12. Weitere Referenzen sind [Ca] und [Ge], §4 und §7 sowie [JL] Ch.1.

N.N

26.04.07 **4. Der Tensorproduktsatz**

Der Tensorproduktsatz für automorphe Darstellungen. ([Co1], Lecture 3) [Bu], Theorem 3.3.3 und §3.4.

N.N

Die lokale Theorie Automorpher Darstellungen

03.05.07 **5. Der Jacquetmodul und superkuspidale Darstellungen**

Es sollen einige Aspekte über die Darstellungstheorie der Gruppen $G(\mathbb{Q}_p)$ vertieft werden. Dies dient als Vorbereitung für den folgenden Vortrag. Inhalt soll im wesentlichen [Ro1], S.5 (unten) bis Seite 10 sein. Der Beweis von [Ro1], Prop. 9, lässt sich durch direkte Rechnung erbringen. Referenz habe ich leider keine. In [Ca], S.5 wird gezeigt, dass $V_{\chi^{-1}}$ isomorph zur kontragradienten Darstellung von V_χ ist. In [Ca], am Ende von §1, wird ein Beweis von [Ro1], Prop 11, gegeben. Außerdem sollte man im Anschluss an [Ro1], Cor.13, zeigen, dass eine irreduzible Darstellung entweder eine Unterdarstellung einer Hauptreihendarstellung oder superkuspidal ist. (Der Beweis ist leicht.) [Ro1], Thm.14, soll nicht bewiesen werden.

Am Ende könnte man erwähnen, wann zwei Hauptreihendarstellungen V_χ isomorph sind, und wie im irreduziblen Fall die (getwisteten) Steinbergdarstellungen 'aussehen'. (s. [Bu], §4.5, [Ca].) Folglich gibt es drei klassen von irreduziblen zulässigen Darstellungen von $G(\mathbb{Q}_p)$: Superkuspidale, (irreduzible) Hauptreihen- und (getwistete) Steinbergdarstellungen, s. [Bu], S. 482. N.N

10.05.07 **6. Whitakkermodelle und Multiplizität Eins**
Als Vorbereitung sollten additive Charaktere auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ und Adelen erläutert werden. Dies findet sich z.B. in ??? Dann soll das globale Whitakkermodel einer automorphen Darstellung erläutert werden. Dies lässt sich gut mit Hilfe der Fourierentwicklung klassischer Modulformen motivieren, indem man die Fourierkoeffizienten der Form vergleicht mit der Whittakerfunktion der zugehörigen automorphen Form bezüglich eines additiven Charakters; s. [Co1], Lecture 4, [Co2], §1.2, oder [Bu], § 3.5. Als nächstes sollen lokale Whittakerfunktionale und Whittakermodelle definiert werden; s. [Ro1] S. 12 und [Bu], § 4.4. Aus der Eindeutigkeit der lokalen Whittakermodelle soll die des globalen hergeleitet werden, sowie *Multiplizität Eins* für automorphe Darstellungen. Die Eindeutigkeit der lokalen Whittakermodelle ergibt sich wie folgt: Für die Hauptreihen wird in [Ro1], S.15 unten – S. 16 ein Beweis gegeben. Anschließend erläutere man, dass der Endomorphismenring der Darstelung $\mathrm{Ind}_N^G(\psi)$ kommutativ ist – ein Beweis hiervon wird in [Co2] im Beweis von Theorem 1.2 skizziert. Für superkuspidale Darstellungen ergibt sich die Eindeutigkeit des Whattakermodells nun leicht aus dem Spltting Principle, [Ro1], Prop. 11. (so wie es in [Co2], Beweis von Theorem 1.2 angedeutet wird.)

N.N

17.05.07 **7. Kirillovmodell und starke Multiplizität Eins**
Der Zugang in [Ro1] scheint mir konzeptionell am besten. Begonnen werden sollte mit den Darstellungen τ_ψ und $\hat{\tau}_\psi$ in [Ro1], S. 11 und mit Lemma 15. Als nächstes beweise man [Ro1], Prop. 17, und definiere das Kirillovmodell [Ro1], S. 15. Anschließend erläutere man kurz die Korollare 20–22. Für Steinberg und irreduzible Hauptreihendarstellungen, wäre es schön, kurz das Kirillovmodell anzugeben, [Ro1], Cor. 24, (vermutlich aus Zeitgründen ohne Beweis). Nun sollte die Eindeutigkeit des Kirillovmodells, sowie die *starke Multiplizitäts Eins Eigenschaft* automorpher Darstellungen bewiesen werden; s. [Bu], §3.5 und [Co2], § 1.3.

N.N

24.05.07 **L-Funktionen, der Führer einer Darstellung und Alt- und Neuformen** In diesem Vortrag sollen verschiedene Themen behandelt werden. Unter anderem dienen sie als Vorbereitung für den folgenden Vortrag. Zunächst sollen (lokale) L-Funktionen und die lokale Funktionalgleichung erläutert werden, wie etwa in [Ro1], S.19–21. Im Falle unverzweigter Hauptreihen ist der Vektor, der in [Ro1], Prop. 27 erwähnt wird, der sphärische Vektor, s. auch [Bu] §4.6 und 4.7. Anschließend soll der Führer einer lokalen Darstellung definiert werden. Dies findet sich in [De], ??? .

Als weitere Themen würden sich anbieten: Die explizite Berechnung der Heckealgebra einer unverzweigten lokalen Darstellung. (alle solche sind Hauptreihendarstellungen) wie etwa in [Ro1], S. 22–23, oder [Bu], §4.6, sowie der Heckeeigenwerte.

4. Alt- und Neuformen in der Sprache der automorphen Formen
Heckealgebren via Konvolution [als Alternative zur Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$]
Weitere Beziehungen zwischen klassischen Heckeeigenformen und automorphen Darstellungen: [Co1], §3.5, [Bu], Thm. 3.6.1, [De], Scholie 2.4.2 und allgemein, [De], Ch. 1–2.
Die Atkin-Lehner-Theorie aus der Sicht der automorphen Formen, in [De], Ch 2. [oder Casselmann ??] .

7. Weil Darstellungen und Darstellungen an der archimedischen Stellen
Weil Darstellungen - falls dies irgendwei sinn macht - und komplettierung der Resultate der vorangegangenen beiden Vortraege. Außerdem wäre es nützlich, auch den archimedischen Fall zu streifen.

8. Die lokale Langlandskorrespondenz
Die lokale Langlands Korrespondenz und der Zusammenhang mit den lokalen Eigenschaften von Galoisdarstellungen:
Sei $\pi_f = \otimes_v \pi_v$ die Tensorproduktzerlegung der automorphen Darstellung zu einer kuspidalen Heckeeigenform f. Dann gelten:
(i) hat f an der Primstelle p die Stufe 1, so ist π_p 'unramified principal series', und der lokale L-faktor von π_p stimmt mit dem lokalen L-Faktor von f überein. [Die Heckeoperatoren operieren auf f und dem sphärischen Vektor (im wesentlichen wieder f) auf dieselbe Weise.]
(ii) wirft man noch die LL-Korrespondenz ins Spiel, so gibt es Korrespondenzen:

$$\pi_p \longleftrightarrow \text{Weil-Deligne-Darst zu } \pi_p \longleftrightarrow \ell\text{-ad. Gal.-Darst zu } f \text{ an } I_p$$

Ein mögliche Referenz ist [De], Ch.3. .

N.N

??? wie kommt man von einer Form zu einer irreduziblen Darstellung und umgekehrt.

Die Spurformel im kompakten Fall

Als Referenz für die Spurformel ist der Artikel [Bu2] sehr geeignet. Weiteres Material hierzu findet sich in [Bu]. Der Artikel [Mo] soll eine gute Übersicht enthalten.

31.05.07 **9.**
.

N.N

14.06.07 **10.**
.

N.N

21.06.07 **11.**
.

N.N

Die Spurformel im allgemeinen Fall

Hier bleibt nur [Ge], §8-§10 als Referenz und natürlich [JL]. Weitere Möglichkeiten sind [He], [Mi]

28.06.07 **12.**

.

N.N

05.07.07 **13.**

.

N.N

12.07.07 **14.**

.

N.N

References

[BG] D. Bump, J. W. Cogdell, E. de Shalit, D. Gaitsgory, E. Kowalski, S. S. Kudla, *An introduction to the Langlands program*, Lectures presented at the Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, March 12–16, 2001. Edited by Joseph Bernstein and Stephen Gelbart. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[Bu] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55.

[Bu2] D. Bump, Aufsatz 8 in [BG].

[Ca] Casselmann: Aufsatz 1 in [MF].

[Co1] J.W. Cogdell: Aufsatz 1 in [CKM].

[Co2] J.W. Cogdell: *L-functions and converse theorems for* GL_n ??? .

[CKM] James W. Cogdell, Henry H. Kim, M. Ram Murty, *Lectures on automorphic L-functions*, Fields Institute Monographs, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[De] Deligne: Aufsatz 2 in [MF].

[Ge] Stephen S. Gelbart, *Automorphic forms on adèle groups*, Annals of Mathematics Studies, No. 83. Princeton University Press, Princeton, 1975.

[Go] Roger Godement, H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, LNM **260**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[He] D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula for* PSL(2, R), Vol. 1, LNM **548**, Vol. 2, LNM **1001**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[JL] H. Jacquet, R. P. Langlands, *Automorphic forms on* GL(2), LNM **114**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Ku] Kudla, Aufsatz 7 in [BG].

[La] Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties* Parts I and II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 41. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. [Einer der Anhänge beschreibt die lokale Darstellungstheorie, ein anderer die Zerlegung von L_0^2]

[Mi] T. Miyake, *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1989. [Resultate über die Spurformel.]

[MF] ed. W. Kuyk and J.-P. Serre, *Modular functions of one variable III*, Proceedings of the International Summer School, University of Antwerp, RUCA, July 17–August 3, 1972, LNM **350**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[Mo] Colette Moeglin, *???* .

[Ro1] J. R. Rogawski, *Admissible Representations of $GL_2(F)$: The p-adic case*, preprint ??? .

[Ro2] J. R. Rogawski, *Modular forms, the Ramanujan conjecture and the Jacquet-Langlands correspondence*, Appendix to ??? .