

Übungsblatt 1

21.04.2020

Abgabe bis zum 29.04.2020 um 09:00 Uhr

**Aufgabe 1** (Opposite Ringe und Gruppen, 1+1+1 Punkte). Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $G$  eine Gruppe. Die zu  $G$  *opposite Gruppe* oder *Gegengruppe*  $G^{\text{opp}}$  ist die Gruppe, die auf der selben Menge, wie  $G$  definiert ist und deren Verknüpfung durch  $\cdot^{\text{opp}}: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto h \cdot g$  gegeben ist, wobei  $\cdot$  die Verknüpfung von  $G$  ist. Zeigen Sie:

- (a) Es existiert ein Gruppen-Isomorphismus  $G \rightarrow G^{\text{opp}}$ .
- (b) Es existiert ein Ring-Isomorphismus  $M_{n \times n}(R) \rightarrow M_{n \times n}(R)^{\text{opp}}$ .
- (c) Geben Sie zwei im allgemeinen verschiedene Gruppen-Isomorphismen  $\text{GL}_n(R) \rightarrow \text{GL}_n(R)^{\text{opp}}$  an.

**Aufgabe 2** (Homomorphismenmengen, 1+1 Punkte). Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. In der Vorlesung wurde die Struktur einer abelschen Gruppe und, falls  $R$  kommutativ ist, eine  $R$ -Modulstruktur auf  $\text{Hom}_R(R, M)$  eingeführt. Sei  $f: \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, \varphi \mapsto \varphi(1)$ . Zeigen Sie:

- (a)  $f$  ist ein Gruppen-Isomorphismus.
- (b) Ist  $R$  kommutativ, so ist  $f$  ein  $R$ -Modulisomorphismus.

**Aufgabe 3** (Lokalisierungen von Moduln, 1+1+1+1 Punkte). Sei  $R$  ein kommutativer Ring,  $S \subset R$  eine multiplikativ abgeschlossene Menge und  $M$  ein  $R$ -Modul. In Algebra 1 hatten wir die Lokalisierung  $S^{-1}R$  von  $R$  nach  $S$  definiert. Im Folgenden wird die Lokalisierung  $S^{-1}M$  von  $M$  nach  $S$  definiert und wir führen darauf die Struktur eines  $S^{-1}R$ -Moduls ein.

$S^{-1}M$  sei die Menge der Äquivalenzklassen  $(M \times S)/\sim_M$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $\sim_M$  auf  $M \times S$ , die durch

$$(m, s) \sim_M (m', s') : \Longleftrightarrow \exists t \in S : t(s'm - sm') = 0$$

definiert ist. Wir schreiben  $\frac{m}{s}$  für die Klasse von  $(m, s)$ .

Wir definieren Abbildungen

$$\begin{aligned} +_{S^{-1}M} : S^{-1}M \times S^{-1}M &\rightarrow S^{-1}M, \left(\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'}\right) \mapsto \frac{s'm + sm'}{ss'} \\ \cdot_{S^{-1}M} : S^{-1}R \times S^{-1}M &\rightarrow S^{-1}M, \left(\frac{r}{s}, \frac{m}{s'}\right) \mapsto \frac{rm}{ss'} \end{aligned}$$

Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass diese Abbildungen wohldefiniert sind und eine  $S^{-1}R$ -Modulstruktur auf  $S^{-1}M$  definieren. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Es gilt  $(S^{-1}R)^n \cong S^{-1}(R^n)$ .
- (b) Ist  $M'$  ein weiterer  $R$ -Modul und  $\varphi: M \rightarrow M'$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus, so ist

$$S^{-1}\varphi: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M', \frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$$

ein  $S^{-1}R$ -Modulhomomorphismus.

- (c) Ist  $\varphi$  in (b) ein Isomorphismus, so ist  $S^{-1}\varphi$  ebenfalls ein Isomorphismus. Insbesondere folgt aus  $M \cong R^n$ , dass  $S^{-1}M \cong (S^{-1}R)^n$  gilt.
- (d) Sei  $R$  ein Integritätsbereich, seien  $m, m' \in \mathbb{N}_0$  und gelte  $R^m \cong R^{m'}$ . Zeigen Sie  $m = m'$  ohne Verwendung der entsprechenden Aussage der Vorlesung.

**Aufgabe 4** (Direkte Summen, 1+2 Punkte). Sei  $R$  ein Ring und  $M_1$  und  $M_2$  zwei  $R$ -Moduln. Sei  $M := M_1 \oplus M_2$ . Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen

$$\begin{aligned}\iota_1 : M_1 &\rightarrow M, m \mapsto (m, 0), & \pi_1 : M &\rightarrow M_1, (m_1, m_2) \mapsto m_1, \\ \iota_2 : M_2 &\rightarrow M, m \mapsto (0, m), & \pi_2 : M &\rightarrow M_2, (m_1, m_2) \mapsto m_2\end{aligned}$$

erfüllen:

- (i) Für  $i = 1, 2$  gilt  $\pi_i \circ \iota_i = \text{id}_{M_i}$ .
  - (ii) Es gilt  $\pi_1 \circ \iota_2 = 0$  und  $\pi_2 \circ \iota_1 = 0$ .
  - (iii)  $\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = \text{id}_M$ .
- (b) Ist  $M'$  ein  $R$ -Modul und seien  $\iota_i : M_i \rightarrow M'$  sowie  $\pi_i : M' \rightarrow M_i$  für  $i = 1, 2$  vier  $R$ -Modulhomomorphismen, sodass die folgenden Eigenschaften (i)-(iii) gelten, dann ist  $M' \cong M$ .
- (i) Für  $i = 1, 2$  gilt  $\pi_i \circ \iota_i = \text{id}_{M_i}$ .
  - (ii) Es gilt  $\pi_1 \circ \iota_2 = 0$  und  $\pi_2 \circ \iota_1 = 0$ .
  - (iii)  $\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = \text{id}_{M'}$ .

**Aufgabe 5** (Freie endlich erzeugte Moduln, 2 Punkte). Sei  $R$  ein Ring und sei  $M$  ein freier  $R$ -Modul. Zeigen Sie: Ist  $M$  endlich erzeugt, so gilt für jeden Isomorphismus  $M \cong R^{(I)}$ ,  $I$  eine Menge, dass  $I$  endlich ist.

**Aufgabe 6** (Exakte Sequenzen, 2+2+2 Punkte).

(a) Sei  $R$  ein Ring und

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Zeigen Sie, dass  $\ker(f) \cong A$  und  $\text{coker}(f) \cong D$  ist.

(b) Sei  $K$  ein Körper,  $k \in \mathbb{N}_0$  und

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_{k-1} \longrightarrow V_k \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $K$ -Moduln von endlichem Rang. Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \dim_K V_i = 0.$$

(c) Finden Sie einen  $\mathbb{Z}$ -Modul  $A$  und Abbildungen  $f, g$ , sodass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

exakt ist, aber nicht spaltet, und weisen Sie dies nach.