Algebra 2 **Universität Heidelberg**
SoSe 2020 Prof. Dr. Gebhard Böckle
Julian Quast

Übungsblatt 3 05.05.2020
Abgabe bis zum 12.05.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Nur freie Moduln, 2 Punkte)**.** Sei $R \neq 0$ ein Ring. Zeigen Sie: Ist jeder R-Linksmodul frei, so ist R ein Schiefkörper.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz ist der Folgende: Wie in der Algebra 1 zeigt man mit dem Lemma von Zorn, dass jeder Ring ein maximales Linksideal I besitzt (Beweis nicht verlangt). Dann überlegt man, dass $M = R/I$ ein einfacher R-Modul ist (warum?), und folgert in einigen weiteren Schritten, dass R ein Schiefkörper ist.

Aufgabe 2 (Einfache und unzerlegbare Moduln, 1+1+2+2+1+1+1+1+2+2 Punkte + 2+2 Zusatzpunkte)**.** Sei $R \neq 0$ ein Hauptidealring, der kein Körper ist.[1] Bezeichne $0 \neq \mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, M einen R-Modul, $0 \neq x$ ein Element aus R und sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\operatorname{Ann}(M) = \{r \in R \mid rm = 0 \forall m \in M\}$ der Annulator (oder das Annulatorideal) von M. Es gilt (Beweis nicht verlangt): M ist ein Modul über dem Faktorring $R/\operatorname{Ann}(M)$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $xy = z$ für Elemente y, z aus R, so ist

$$0 \longrightarrow R/Ry \xrightarrow{r+Ry \mapsto rx+Rz} R/Rz \xrightarrow{r+Rz \mapsto r+Rx} R/Rx \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln.

(b) M ist ein einfacher R-Modul genau dann, wenn es ein Primideal $0 \neq \mathfrak{q} \subset R$ gibt mit $M \cong R/\mathfrak{q}$.

(c) Der R-Modul R/Rx erfüllt folgende Eigenschaften: (i) seine Länge ist endlich und gleich der Anzahl der Primfaktoren von x. (ii) Es gilt $\operatorname{Ann}(R/Rx) = Rx$.
Hinweis: Verwende Teil (a) und Induktion über die Anzahl der Primfaktoren von x.

(d) Der R-Modul M hat endliche Länge genau dann wenn gelten: M is endlich erzeugt und $\operatorname{Ann}(M) \subset R$ ist nicht das Nullideal.
Hinweis: Betrachte ein Erzeugendensystem von M und verwende, dass R nicht artinsch ist.

(e) Der R-Modul R ist unzerlegbarer R-Modul.

(e') Die R-Moduln $R/\mathfrak{p}^n$ sind unzerlegbare R-Moduln.
Hinweis: Überlege zunächst, dass $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n$ das einzige maximale Ideal von $R/\mathfrak{p}^n$ ist.

(f) Gelte $x = yz$ für $y, z \in R \setminus R^\times$ mit $\operatorname{ggT}(y, z) = 1$. Dann existiert ein Idempotentes $e \in R/x$ mit $e \neq 0, 1$ und so dass $e \cdot R/x \cong R/y$ und $(1-e) \cdot R/x \cong R/z$ gelten. **Hinweis:** Chinesischer Restsatz.

(f') Gilt $\operatorname{Ann}(M) = yzR = xR$ mit $y, z \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ wie in (f), und ist $e \in R/x$ aus (f), so gilt $M = e \cdot M \oplus (1-e) \cdot M$ (als R/x- und als R-Moduln) und beide Summanden sind ungleich Null.

(f") Sei M ein R-Modul endlicher Länge mit $\operatorname{Ann}(M) = \mathfrak{p}^m$. Sei in diesem Fall $M_i = \{m \in M \mid \mathfrak{p}^i \cdot m = 0\}$, $i = 1, \ldots, m$. Zeigen Sie $M \cong R/\mathfrak{p}^m$ gilt genau dann, wenn $M_1 \cong R/\mathfrak{p}$ gilt.
Hinweis: Induktion über die Länge von M.

(g*) Ist M ein unzerlegbarer R-Modul von endlicher Länge, so ist M isomorph zu $R/\mathfrak{q}^m$ für ein Primideal $0 \neq \mathfrak{q} \subset R$ und ein $m \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Gilt $\operatorname{Ann}(M) = \mathfrak{q}^d$, so findet man ein $x \in M$ mit $Rx \cong R/\mathfrak{q}^d$. Dann findet man mit (f") und Induktion über die Länge von M, eine Surjektion $M \to R/\mathfrak{q}^d$, die auf Rx ein Isomorphismus ist.

[1] Berühmte Beispiele sind $R = \mathbb{Z}$ und $R = K[X]$.

(h*) Sei M von endlicher Länge. Dann existieren bis auf Vertauschung eindeutige Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ und für jedes $i = 1, \dots, t$ eindeutige $l_i \in \mathbb{N}$ und eindeutige absteigende Ketten natürlicher Zahlen $e_{i,1} \geq e_{i,2} \geq \dots \geq e_{i,l_i}$, so dass gilt

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{t} \Big(\bigoplus_{j=1}^{l_i} R/\mathfrak{p}_i^{e_{i,j}} \Big).$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Krull-Schmidt-Remak (ohne Beweis) und die obigen Aufgabenteile.

Aufgabe 3 (Kategorientheorie, 2+3 Punkte)**.**

(a) Sei $\mathcal{C} = (\operatorname{Obj}\mathcal{C}, \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \operatorname{dom}, \operatorname{cod}, \circ, \mathbf{1})$ eine Kategorie. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = (\operatorname{Obj}\mathcal{C}, \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \operatorname{cod}, \operatorname{dom}, \circ^{\mathrm{opp}}, \mathbf{1})$ mit

$$\circ^{\mathrm{opp}} : \{(f,g) \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \times \operatorname{Mor}\mathcal{C} \mid \operatorname{cod} f = \operatorname{dom} g\}, (f,g) \mapsto g \circ f$$

eine Kategorie ist[2]. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{opp}} = \mathcal{C}$ ist.

(b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und A ein Objekt von $\mathcal{C}$. Wir definieren die Kategorie $A/\mathcal{C}$ der *Objekte unter A* wie folgt: Die Mengen $\operatorname{Obj} A/\mathcal{C}$ und $\operatorname{Mor} A/\mathcal{C}$ sind durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Obj} A/\mathcal{C} &:= \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \mid \operatorname{dom} f = A\} \\ \operatorname{Mor} A/\mathcal{C} &:= \{(f,g,h) \in (\operatorname{Mor}\mathcal{C})^{\times 3} \mid \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = A, \operatorname{cod} f = \operatorname{dom} h, \operatorname{cod} h = \operatorname{cod} g, h \circ f = g\} \end{aligned}$$

gegeben. Ist $(f,g,h) \in \operatorname{Mor} A/\mathcal{C}$, so setzen wir $\operatorname{dom}_{A/\mathcal{C}}(f,g,h) := f$ und $\operatorname{cod}_{A/\mathcal{C}}(f,g,h) := g$. Die Komposition zweier verkettbarer Morphismen (f,g,h) und (g,j,k) sei gegeben durch

$$(g,j,k) \circ (f,g,h) := (f,j,k \circ h).$$

Die Identitäten-Abbildung sei

$$\mathbf{1}_{A/\mathcal{C}} : \operatorname{Obj} A/\mathcal{C} \to \operatorname{Mor} A/\mathcal{C}, f \mapsto (f,f,\mathrm{id}_{\operatorname{cod} f}).$$

Zeigen Sie, dass $A/\mathcal{C} := (\operatorname{Obj} A/\mathcal{C}, \operatorname{Mor} A/\mathcal{C}, \operatorname{dom}_{A/\mathcal{C}}, \operatorname{cod}_{A/\mathcal{C}}, \circ_{A/\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{A/\mathcal{C}})$ eine Kategorie ist.

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Objekte und Morphismen von $A/\mathcal{C}$ durch Diagramme und ergänzen Sie Ihre Beweise jeweils durch Diagramme.

Bemerkung/Beispiel: Sei A ein kommutativer Ring. Die Kategorie der kommutativen A-Algebren $\underline{\mathrm{CAlg}}_A$ und die Kategorie $A/\,\underline{\mathrm{CRing}}$ sind äquivalent.

[2] Beachten Sie die Reihenfolge der Bestandteile von $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$.