Algebra 2 **Universität Heidelberg**
SoSe 2020 Prof. Dr. Gebhard Böckle
Julian Quast

Übungsblatt 5 19.05.2020
Abgabe bis zum 26.05.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Limiten, 2+3+1 Punkte)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Zeigen Sie:

(a) Enthält $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt und für je zwei Objekte A und B das Produkt von A und B, so enthält $\mathcal{C}$ für jede endliche Familie $A_1, \ldots, A_n$ von Objekten das Produkt $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

(b) Enthält $\mathcal{C}$ alle Produkte und alle Differenzkerne, so enthält $\mathcal{C}$ alle Limiten.

(c) Enthält $\mathcal{C}$ alle endlichen Produkte und alle Differenzkerne, so enthält $\mathcal{C}$ alle endlichen Limiten.

Bemerkung: Ein *endlicher Limes* ist ein Limes eines Diagramms, dessen Indexkategorie nur endlich viele Objekte und endlich viele Morphismen enthält. Sie dürfen in (c) auf Ihre Lösung von (b) Bezug nehmen und müssen nicht alle Argumente erneut ausführen.

Aufgabe 2 (Adjungierte Funktorpaare, 3+1 Punkte)**.** Wir wollen adjungierte Funktoren an einem konkreten Beispiel verstehen. Sei $\underline{\mathrm{Grp}}$ die Kategorie der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen und $\underline{\mathrm{Ab}}$ die volle Unterkategorie der abelschen Gruppen. Sei $G : \underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ der Inklusionsfunktor.

(a) Zeigen Sie, dass G einen linksadjungierten Funktor $F : \underline{\mathrm{Grp}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ besitzt.

(b) Geben Sie Einheit und Koeinheit der Adjunktion $F \dashv G$ an.

Hinweis: Ist $f : G \to H$ ein Homomorphismus einer Gruppe in eine abelsche Gruppe, so gilt $[G, G] \subset \ker(f)$.

Aufgabe 3 (Tensorprodukte, 2+2+2+2+2 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Sei R ein Ring, M und N Rechtsmoduln über R und A ein R-Linksmodul. Sei $f : M \to N$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Dann ist $f \otimes \mathrm{id}_A : M \otimes_R A \to N \otimes_R A, m \otimes a \mapsto f(m) \otimes a$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(b) Sei R ein Hauptidealring und $a, b \in R \setminus \{0\}$. Dann ist $R/a \otimes_R R/b \cong R/\mathrm{ggT}(a, b)$ als R-Moduln.

(c) Sei R ein Ring und I, J Mengen. Dann ist $R^{(I)} \otimes_R R^{(J)} \cong R^{(I \times J)}$ als R-Linksmoduln.

(d) Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$V \times V^* \to \mathrm{End}_K(V), (a, f) \mapsto (x \mapsto f(x)a)$$

K-balanciert. Die induzierte K-lineare Abbildung $\varphi : V \otimes_K V^* \to \mathrm{End}_K(V)$ ist ein Isomorphismus.

(e) Der Isomorphismus φ aus (d) hat folgende Eigenschaft: Ein Element $x \in V \otimes_K V^*$ ist genau dann ein *reiner Tensor*, das heißt ein Element im Bild der natürlichen Abbildung $V \times V^* \to V \otimes_K V^*$, wenn der Endomorphismus $\varphi(x) : V \to V$ höchstens Rang 1 hat.

Bonusaufgabe 4 (Rechtsadjungierte erhalten Limiten, 2+2 Zusatzpunkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, der einen linksadjungierten Funktor besitzt. Sei $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm in $\mathcal{C}$, sodass der Limes $\lim_{i \in \mathcal{I}} D(i)$ in $\mathcal{C}$ existiert. Dann existiert der Limes des Diagramms FD in $\mathcal{D}$ und es gibt einen Isomorphismus $\lim_{i \in \mathcal{I}} FD(i) \to F(\lim_{i \in \mathcal{I}} D(i))$.

(b) Der Vergissfunktor $\underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ besitzt keinen rechtsadjungierten Funktor.

Bemerkung: Die Aussage in (a) wird in der Praxis häufig verwendet.
Hinweis zu (b): Verwenden Sie die zu (a) duale Aussage.