Algebra 2 | **Universität Heidelberg**
SoSe 2020 | Prof. Dr. Gebhard Böckle
Julian Quast

Übungsblatt 9 | 23.06.2020
Abgabe bis zum 30.06.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Injektive Auflösungen, 1+2+2+1 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Q}$ ist ein injektives Objekt in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$.

(b) Es gibt kurze exakte Sequenzen der folgenden Form:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Geben Sie explizite Abbildungsvorschriften für alle Pfeile an, so dass die obige Aussage stimmt!

(c) Erläutern Sie, wie man aus (b) unter Verwendung des Struktursatzes für endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln[1] für jeden solchen eine injektive Auflösung erhält.

(d) Für einen Hauptidealring R mit Quotientenkörper $K \supset R$ sind K/R und K injektive Objekte in ${}_R\mathsf{Mod}$. Es genügt, wenn Sie die Aussage für einen der R-Moduln K oder K/R zeigen.

Bemerkung: Teile (b) und (c) lassen sich mit Hilfe von (d) auf beliebige Hauptidealringe R verallgemeinern.

Aufgabe 2 (Homotopie, 2+2+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Falls $C^\bullet, D^\bullet \in \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A})$ und $f, g : C^\bullet \to D^\bullet$ Kettenmorphismen sind, dann schreiben wir $f \sim g$, falls f homotop zu g im Sinne von Definition III.51.(a) ist. Man beachte die Reihenfolge von f und g. Zeigen Sie:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A})(C^\bullet, D^\bullet)$.

(b) Seien $f, f' : C^\bullet \to D^\bullet$ und $g, g' : D^\bullet \to E^\bullet$ Kettenmorphismen, sodass $f \sim f'$ und $g \sim g'$ gelten. Dann gilt $g \circ f \sim g' \circ f'$.

(c) Sei $\mathcal{B}$ eine weitere additive Kategorie und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. Die Vorschrift $F(C^\bullet)^i := F(C^i)$ und $(Ff)^i := F(f^i) : C^i \to D^i$ definiert einen additiven Funktor $F : \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A}) \to \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{B})$. Weiter gilt für Morphismen $f, f' : C^\bullet \to D^\bullet$ in $\underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A})$ die Aussage $f \sim f' \Rightarrow Ff \sim Ff'$.

Bemerkung zu (c): Der Funktor $F : \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A}) \to \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{B})$ ist ebenfalls additiv, das müssen Sie nicht zeigen.

Aufgabe 3 (Azyklische Komplexe, 2+1+2+3 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Für einen Doppelkomplex C in $\underline{\mathrm{Ch}}^{**}(\mathcal{A})$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Doppelkomplexe $\tau^{\geq n}C$ und $\tau^{\leq n}C$ durch:

$$(\tau^{\geq n}C)^{ij} := \begin{cases} C^{ij}, & \text{falls } j \geq n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad d^{ij}_{\tau^{\geq n}C,?} := \begin{cases} d^{ij}_{C,?}, & \text{falls } j \geq n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{für } ? \in \{\mathrm{v}, \mathrm{h}\}, (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

$$(\tau^{\leq n}C)^{ij} := \begin{cases} C^{ij}, & \text{falls } j \leq n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad d^{ij}_{\tau^{\leq n}C,?} := \begin{cases} d^{ij}_{C,?}, & \text{falls } j \leq n \text{ und } ? = \mathrm{h}, \\ d^{ij}_{C,?}, & \text{falls } j < n \text{ und } ? = \mathrm{v}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{für } ? \in \{\mathrm{v}, \mathrm{h}\}, (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist die Folge

$$0 \longrightarrow D_1^\bullet \longrightarrow D_2^\bullet \longrightarrow D_3^\bullet \longrightarrow 0$$

exakt in $\underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A})$, so gilt: Sind zwei der Komplexe $D_1^\bullet$, $D_2^\bullet$, $D_3^\bullet$ azyklisch, so auch der dritte.

---

[1] Diesen dürfen Sie ohne Beweis aus der Standardliteratur zitieren.

Sei nun C ein Doppelkomplex in $\underline{\mathrm{Ch}}^{**}(\mathcal{A})$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow \tau^{\geq n} C \longrightarrow C \longrightarrow \tau^{\leq n-1} C \longrightarrow 0$$

in $\underline{\mathrm{Ch}}^{**}(\mathcal{A})$ exakt. Die Übergangsabbildungen $(\tau^{\geq n}C)^{ij} \to C^{ij}$ und $C^{ij} \to (\tau^{\leq n-1}C)^{ij}$ sind durch Identitäten gegeben wo möglich, ansonsten durch die Nullabbildung.

Ab nun erfülle C die folgende Bedingung:

- Für alle $j \in \mathbb{Z}$ ist die Zeile $(C^{ij}, d_{\mathrm{v}}^{ij})_{i \in \mathbb{Z}}$ ein azyklischer Komplex.

(c) Existieren $b_0 \leq b_1$ in $\mathbb{Z}$, sodass $C^{ij} = 0$ für alle $j > b_1$ und alle $j < b_0$ und alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt, so ist $\mathrm{Tot}(C)$ azyklisch.
Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis und verwenden Sie die Exaktheit von Tot und Teil (a).

Ab nun gelte für C die folgende zusätzliche Bedingung:

- Es gibt ein $b \in \mathbb{Z}$, sodass $C^{ij} = 0$, falls $i < b$ oder $j < b$.

(d) Der Komplex $\mathrm{Tot}(C)$ ist azyklisch.
Hinweis: Überlegen Sie hierzu folgende Aussagen für ein festes $i \in \mathbb{Z}$: Es gibt ein $b_1 \geq b$ in $\mathbb{Z}$, sodass gelten: (i) $\mathrm{Tot}(\tau^{\geq b_1+1}C)^j = 0$ für alle $j \leq i+1$. (ii) $H^i(\mathrm{Tot}(C)) = H^i(\mathrm{Tot}(\tau^{\leq b_1}C))$. (iii) Der Doppelkomplex $\tau^{\leq b_1}C$ erfüllt die Voraussetzungen von (c).

Allgemeiner Hinweis: Veranschaulichen Sie sich bildlich, bei welchen Doppelindizes in $\mathbb{Z}^2$ die jeweiligen Doppelkomplexe nichtverschwindende Einträge haben.