Übungsblatt 10 30.06.2020
Abgabe bis zum 06.07.2020 um 09:00 Uhr

Eine abelsche Katgorie $\mathcal{A}$ heißt **spaltend** genau dann, wenn jede kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$ spaltet.

Aufgabe 1 (Spaltende abelsche Kategorien, 1+1+1 Punkte)**.** Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, so dass $\mathcal{A}$ spaltend ist. Zeigen Sie:

(a) Jeder additive Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist exakt.

(b) Alle Objekte von $\mathcal{A}$ sind projektiv und injektiv.

(c) Für jeden additiven Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gilt $L_i F = 0$ und $R^i F = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Ist D ein Körper (oder ein Schiefkörper), so ist die Kategorie $\underline{\mathrm{Vec}}_D$ der Vektorräume über D spaltend. Ist G eine endliche Gruppe und K ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$, so dass p die Ordnung von G nicht teilt, so ist die Kategorie ${}_{K[G]}\,\mathsf{Mod}$ spaltend (Satz von Maschke).

Sei R ein Integritätsbereich. Ein R-Modul M heißt **teilbar** genau dann, wenn $M \to M, m \mapsto am$ für alle $a \in R \setminus \{0\}$ surjektiv ist. Mit dem Baer-Kriterium für Injektivität zeigt man (nicht verlangt; vgl. Blatt 9, Aufg. 1): Injektive R-Moduln sind teilbar. Ist R ein HI-Ring, so sind teilbare R-Moduln injektiv.

Aufgabe 2 (Abgeleitete Funktoren für Moduln über HI-Ringen, 1+2+2+1 Punkte)**.** Sei R ein HI-Ring. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist I ein injektiver R-Modul und ist $\bar{I}$ ein Faktormodul von I, so ist $\bar{I}$ injektiv.

(b) Ist $F\colon\ \mathsf{Mod}_R \to \mathcal{A}$ ein linksexakter Funktor in eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, so gilt $R^i F = 0$ für alle $i \geq 2$.

(c) Jeder R-Untermodul P' eines projektive R-Moduls P ist projektiv.
Hinweis: Verwenden Sie (b) und eine lange exakte Ext-Folge, um zunächst zu zeigen, dass $\mathrm{Ext}^i(P', N) = 0$ für alle $i \geq 1$ und $N \in \mathsf{Mod}_R$ gilt.

(d) Ist $G\colon\ \mathsf{Mod}_R \to \mathcal{A}$ ein rechtsexakter Funktor in eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, so gilt $L_i G = 0$ für alle $i \geq 2$.

Ein additiver Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien heißt **auslöschbar** (**koauslöschbar**) genau dann, wenn für jedes $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ ein Monomorphismus $i\colon\ A \to I$ (ein Epimorphismus $p\colon\ P \to A$) existiert, so dass $F(i)\colon FA \to FI$ (bzw. $F(p)\colon FP \to FA$) die Nullabbildung ist.

Aufgabe 3 (Universelle δ-Funktoren, 1+1+3 Punkte)**.** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, so dass $\mathcal{A}$ genügend Injektive besitzt. Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver linksexakter Funktor und sei $RF = (R^i F, \delta^i_{RF})_{i \geq 0}$ der hierzu in der Vorlesung konstruierte kohomologische δ-Funktor. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $F \to R^0 F$.

(b) Die additiven Funktoren $R^i F$, $i \geq 1$, erfüllen $R^i F I = 0$ für $I \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ injektiv, und sie sind auslöschbar.

(c) Sei $T = (T^n, \delta^n_T)$ ein weiterer δ-Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, und sei $u^0\colon\ R^0 F \to T^0$ eine natürliche Transformation. Dann existiert eine eindeutige natürliche Transformation $u^1\colon\ R^1 F \to T^1$, so dass für alle kurzen exakten Folgen $\mathcal{E}\colon 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} R^0 F A'' & \xrightarrow{\delta^0_{RF,\mathcal{E}}} & R^1 F A' \\ {\scriptstyle u^0_{A''}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^1_{A'}} \\ T^0 A'' & \xrightarrow{\delta^0_{T,\mathcal{E}}} & T^1 A'. \end{array}$$

Hinweis: Zur Konstruktion von u^1 verwende man eine kurze exakte Folge $\mathcal{E}$, bei der das mittlere Objekt injektiv ist und sich daraus ergebende exakte Folgen. Zu jeder anderen solchen Folge $\mathcal{E}'$ gibt es einen Pfeil von $\mathcal{E}$, und man verwende dies, um die Wohldefiniertheit von u^1 zu zeigen.

Bemerkungen: (a) Induktiv folgert man hieraus die Universalität von RF. (b) Die Annahme, dass A in $\mathcal{E}$ injektiv ist, ist unnötig. Es genügt, dass $R^i F$ für alle $i \geq 1$ auslöschbar ist. **b.w.**

Aufgabe 4 (Vergleich von $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}$ und $\overline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{A}}$, 2+2+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $C \in \underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\mathcal{A})$ und $n \in \mathbb{Z}$ und seien die Komplexe $\tau^{\leq n}C$ und $\tau^{\geq n}C$ wie in Blatt 9, Aufgabe 3, definiert. Dann gibt es einen Pfeil

$$t_n \colon \mathrm{Tot}(\tau^{\leq n-1}C)[-1] \to \mathrm{Tot}(\tau^{\geq n}C) \text{ in } \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A}),$$

induziert von den Morphismen $d_v^{i\,n-1} \colon C^{i\,n-1} \to C^{i\,n}$, $i \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{Cone}(t_n) = \mathrm{Tot}(C)$ gilt. Ist $\mathrm{Tot}(C)$ azyklisch, so ist t_n ein Quasi-Isomorphismus.

Seien nun $M, N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, so dass M eine projektive Auflösung $p : P \to M(0)$ und N eine injektive Auflösung $i : N(0) \to I$ besitzt. Sei $\tilde{P} = \mathrm{Cone}(p) = (\ldots \to P^{-n} \to \ldots \to P^0 \to M \to 0 \to \ldots)$ und $\tilde{I} = \mathrm{Cone}(i)$. Seien gegeben Doppelkomplexe $C = \mathcal{A}(P, \tilde{I})$ bzw. $D = \mathcal{A}(\tilde{P}, I)$ in $\underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\underline{\mathrm{Ab}})$ durch $C^{ij} = \mathcal{A}(P^{-i}, \tilde{I}^j)$,

$$d_{C,h}^{ij} \colon \mathcal{A}(P^{-i}, \tilde{I}^j) \to \mathcal{A}(P^{-i-1}, \tilde{I}^j), f \mapsto f \circ d_P^{-i-1}, \quad d_{C,v}^{ij} \colon \mathcal{A}(P^{-i}, \tilde{I}^j) \to \mathcal{A}(P^{-i}, \tilde{I}^{j+1}), f \mapsto d_{\tilde{I}}^j \circ f,$$

für $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, und analog $D^{ij} = \mathcal{A}(\tilde{P}^{-i}, I^j)$ etc.

(b) Die Komplexe $\mathrm{Tot}(C)$ und $\mathrm{Tot}(D)$ sind azyklisch in $\underline{\mathrm{Ch}}^*(\underline{\mathrm{Ab}})$ und es gilt $\mathrm{Tot}(\tau^{\leq -1}C) = (\mathcal{A}(P^{-i}, N))_{i \in \mathbb{Z}}[1]$.
Hinweis: Ergebnis von Aufgabe 3, Blatt 9.

(c) Es gibt Quasi-Isomorphismen

$$(\mathcal{A}(P^{-i}, N))_{i \in \mathbb{Z}} \to \mathrm{Tot}(\tau^{\geq 0}C) \leftarrow (\mathcal{A}(M, I^j))_{j \in \mathbb{Z}},$$

und folglich gilt $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{A}}(M,N)$ für $i \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Der erste Quasi-Isomorphismus ergibt sich direkt aus (a) und (b). Für den Zweiten beachte man, dass das Vertauschen von i und j (Austausch der vertikalen und horizontalen Richtung) wieder einen Doppelkomplex in $\underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\underline{\mathrm{Ab}})$ ergibt, auf den man (a) anwenden kann.