Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

24. Oktober 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 1

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Topologische Basen, 4 Punkte)

Sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.

(2) Für jede Auswahl von endlich vielen Mengen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$ existiert ein System von Mengen $\{V_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$, sodass

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n = \bigcup_{i \in I} V_i$$

gilt.

Sei

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \;\middle|\; \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \right\}.$$

(Das heißt $\mathcal{T}$ sei das System derjenigen Mengen, die eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ sind)
Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X und $\mathcal{B}$ ist eine Basis von $\mathcal{T}$.

Aufgabe 2 (Die konjugierte Fläche, 4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i \mid i \in I\}$ ein konformer Atlas für X. Es bezeichne $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ und $\mathcal{A}^\sigma$ die Menge aller Abbildungen

$$\sigma \circ \varphi_i : U_i \to \sigma(V_i) \subset \mathbb{C}.$$

Man zeige:

(a) $\mathcal{A}^\sigma$ ist ein konformer Atlas auf der X zugrunde liegenden komplexen Mannigfaltigkeit und definiert eine Riemannsche Fläche, die mit X^σ bezeichnet wird.

(b) Die Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^\sigma$ sind nicht konform verträglich.

Bitte wenden! $\longrightarrow$

Aufgabe 3 (Der offene Zylinder, 8 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

versehen mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^3$ und ihre Teilmengen

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(x, y, z) \in Z \mid x > 0\}, \\ U_2 &:= \{(x, y, z) \in Z \mid y > 0\}, \\ U_3 &:= \{(x, y, z) \in Z \mid x < 0\}, \\ U_4 &:= \{(x, y, z) \in Z \mid y < 0\}. \end{aligned}$$

Weiterhin seien

$$V := \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \Re(w) < \pi/2\} \subset \mathbb{C}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1 :&U_1 \to V, (x, y, z) \mapsto \arcsin(y) + iz, \\ \varphi_2 :&U_2 \to V, (x, y, z) \mapsto -\arcsin(x) + iz, \\ \varphi_3 :&U_3 \to V, (x, y, z) \mapsto -\arcsin(y) + iz, \\ \varphi_4 :&U_4 \to V, (x, y, z) \mapsto \arcsin(x) + iz. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen φ_i sind komplexe Karten. Geben Sie auch ihre Umkehrabbildungen φ_i^{-1} an. ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$)

(b) $\{\varphi_i \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ ist ein konformer Atlas für Z.

(c) Die Abbildung $\psi : Z \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, (x, y, z) \mapsto (x + iy)e^{-z}$ ist eine komplexe Karte.

(d) Die Atlanten $\{\psi\}$ und $\{\varphi_i \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ sind konform verträglich.

Hinweise:

(1) *Veranschaulichen Sie sich die Aufgabe zunächst an einer Skizze.*

(2) *Nutzen Sie Symmetrien, um den Arbeitsaufwand zu reduzieren.*