Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

14. November 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 4

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Null- und Polstellenverteilungen, 4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche, für die jede Nullstellenverteilung in $\mathcal{O}(X)$ lösbar ist. Zeigen Sie, dass dann auch jede Null- und Polstellenverteilung lösbar ist.

Aufgabe 2 (Weierstraßscher Produktsatz [Skript A2.2], 6 Punkte)

Leiten Sie den Weierstraßschen Produktsatz 2.26 aus dem Satz von Mittag-Leffler 2.8 her, indem Sie die folgenden Aussagen zeigen.

(a) f ist genau dann eine Lösung der Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t\in T} := (\emptyset, \{u_t\}_{t\in T})$ auf $\mathbb{C}$, wenn $\frac{f'}{f}$ eine Lösung der Hauptteilverteilung $\{h_t(z) = u_t z\}_{t\in T}$ auf $\mathbb{C}$ ist.

(b) Zu jeder meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, deren Pole alle einfach sind und positive ganzzahlige Residuen haben, gibt es eine ganze Funktion g mit $f = \frac{g'}{g}$.
Hinweis: Für jedes $R > 0$ findet man eine auf $U_R(0)$ definierte holomorphe Funktion g_R mit $f = \frac{g_R'}{g_R}$ auf $U_R(0)$. Dabei ist g_R bis auf einen Faktor aus $\mathbb{C}^\times$ eindeutig bestimmt. Durch geeignetes Abändern können die g_R mit $R \in \mathbb{N}$ zu einer ganzen Funktion zusammengesetzt werden.

(c) Die Lösbarkeit der Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t\in T}$ in $\mathbb{C}$ folgt nun mit dem Satz von Mittag-Leffler 2.8.

Aufgabe 3 (Unendliche Produkte, 6 Punkte)

Bestimmen Sie die Weierstraßsche Produktdarstellung wie in Korollar 2.27 für die Funktion $\cos(\pi z)$.

Abgabe: **Mittwoch**, 21. November 2018, bis spätestens 9 Uhr ct.