Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

5. Dezember 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 7

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Konvergenzerzeugende Faktoren, 6 Punkte)

Für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachten wir die holomorphe Funktion

$$E_k(z) := (1-z) \cdot \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}\right)$$

auf der Umgebung $U := U_1(0)$ von 0 mit Radius 1. Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in U$ gilt:
$$E_k'(z) = \frac{-z^k E_k(z)}{1-z}.$$

(b) Es ist $E_k(0) = 1$ und $E_k^{(j)}(0) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

(c) Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $z \in U$ mit $|z| \leq \frac{1}{2}$ gilt $|E_k(z) - 1| \leq C \cdot |z|^{k+1}$.

(d) Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $k \geq 2$, dann konvergiert das unendliche Produkt
$$\prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} E_k\left(\frac{z}{\omega}\right)$$
auf jedem Kompaktum K in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ unbedingt absolut.

Hinweis zu (c): Betrachten Sie die Taylorentwicklung von $E_k(z)$ um 0 mit geeignetem Restglied.

Bitte wenden! ⟶

Abgabe: **Mittwoch**, 12. Dezember 2018, bis spätestens 9 Uhr ct.

Aufgabe 2 (Nullstellen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion, 4 Punkte)

Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Sei $\wp$ die zu Λ gehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion.
Zeigen Sie:

(a) $\wp$ hat entweder genau zwei einfache oder genau eine doppelte Nullstelle modulo Λ.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (1) $\wp$ hat eine doppelte Nullstelle.

  (2) $\wp(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ mit $2z_0 \in \Lambda$.

  (3) Die Weierstraß-Konstante $g_3(\Lambda)$ ist 0.

Aufgabe 3 (Doppelte Nullstellen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion, 6 Punkte)

Sei nun Λ ein Gitter mit $g_3(\Lambda) = 0$, das heißt $\wp$ hat nach vorheriger Aufgabe eine doppelte Nullstelle in $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\wp(z + z_0) = \frac{1}{\wp(z)} \cdot c$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (\Lambda \cup (-z_0 + \Lambda))$.

(b) $\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\wp''(z_0) = -\frac{g_2}{2}$.

(c) Die Konstante c aus Teil (a) ist gleich $-\frac{g_2}{4}$.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion.
Hinweis zu (c): Betrachten Sie die Laurent- bzw. Taylorentwicklungen beider Seiten aus (a) bei $z = 0$.