Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

12. Dezember 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 8

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Additionstheorem funktionentheoretisch, 6 Punkte)

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Für $w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ definieren wir die elliptische Funktion f_w zu Λ durch

$$f_w(z) = \frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von f_w bei 0 bis zum ersten Term (das heißt alle Terme mit Exponenten ≤ 1).

Hinweis: Man verwende die Laurent-Entwicklungen von $\wp$ und $\wp'$.

(b) Zeigen Sie: f_w hat in $\Lambda \cup (-w + \Lambda)$ einfache Pole und sonst keine Pole.

(c) Zeigen Sie: Es gilt $\operatorname{res}_{z=0} f_w = -1$ und $\operatorname{res}_{z=-w} f_w = 1$.

Hinweis: Unterscheiden Sie danach, ob $w \in \frac{1}{2}\Lambda$ gilt.

(d) Seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ so gewählt, dass $z + w, z - w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Zeigen Sie, dass für die $\wp$-Funktion

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w)$$

gilt, indem Sie beide Seiten für festes w als elliptische Funktion in z betrachten.

Bitte wenden! ⟶

Abgabe: **Mittwoch**, 19. Dezember 2018, bis spätestens 9 Uhr ct.

Aufgabe 2 (Eisensteinreihen spezieller Gitter, 6 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für ein beliebiges Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ und eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $g_2(a\Lambda) = \frac{1}{a^4} g_2(\Lambda)$ und $g_3(a\Lambda) = \frac{1}{a^6} g_3(\Lambda)$.

Sei ab jetzt $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \subset \mathbb{C}$.

(b) Es ist $i\Lambda = \Lambda$.

(c) $g_2(\Lambda) \neq 0$ und $g_3(\Lambda) = 0$.

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Werte konkret zu berechnen! Zeigen Sie zuerst $g_3(\Lambda) = 0$ *mit Hilfe von (a) und (b) und führen anschließend* $g_2(\Lambda) = 0$ *mit Hilfe der Differentialgleichung für* $\wp$ *auf einen Widerspruch.*

(d) Es gibt ein Gitter Λ' mit $g_2(\Lambda') = 8$ und $g_3(\Lambda') = 0$.

Aufgabe 3 (Addition auf elliptischen Kurven, 4 Punkte)

Sie $\Lambda' \subset \mathbb{C}$ das Gitter aus Aufgabe 2(d) und $E \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ die zugehörige komplexe algebraische Kurve, deren affiner Teil also durch das Polynom $P(x_1, x_2) = x_2^2 - 4x_1^3 + 8x_1$ gegeben ist. Die Punkte $P = (2, 4)$ und $Q = (0, 0)$ liegen offenbar auf der Kurve E.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für die $\wp$-Funktion zum Gitter Λ' den Punkt $P + Q$ auf E. Hierbei sei $+$ die aus der Vorlesung bekannte Addition auf der elliptischen Kurve E.

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis aus (a) anhand der geometrischen Interpretation der Gruppenstruktur auf E grafisch und skizzieren Sie die Vorgehensweise.