Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

16. Januar 2019

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 11

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Kongruenzuntergruppen, 6 Punkte)

Ziel ist zu zeigen, dass für jede Kongruenzuntergruppe Γ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ der Index $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ endlich ist, und eine Abschätzung für den Index zu bekommen.
Hierzu sei $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ teilerfremd zu N, sowie t das Produkt derjenigen Primteiler von a, die b nicht teilen, so ist $\mathrm{ggT}(a, b + tN) = 1$.

2. Ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $a\alpha - b\beta = 1$, so gilt:
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c - \beta N & d - \alpha N \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - N$$

3. Der Gruppenhomomorphismus $\alpha_N : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ist surjektiv, d.h. zu jeder Matrix $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ gibt es eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\bar{a} = a \mod N, \bar{b} = b \mod N, \bar{c} = c \mod N$ und $\bar{d} = d \mod N$.

4. Für eine Kongruenzuntergruppe Γ, die die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ enthält, gilt:
$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) : \alpha_N(\Gamma)] = \frac{\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}{\#\alpha_N(\Gamma)},$$
insbesondere gilt für $\Gamma(N)$:
$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = \#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Bitte wenden! $\longrightarrow$

Aufgabe 2 (Fundamentalbereiche und Spitzenklassen, 10 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \Gamma_0(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \mod 3 \right\}, \\ \Gamma_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, b \equiv 0 \mod 3 \right\} \end{aligned}$$

und $\mathcal{F}$ der Fundamentalbereich von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ aus der Vorlesung.

1. Bestimmen Sie für Γ_1 und Γ_2 jeweils den Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
2. Bestimmen Sie jeweils ein Vertretersystem $A_1, \ldots, A_n$ der Rechtsnebenklassen von Γ_1 (bzw. von Γ_2) so, dass $\bigcup_{j=1}^{n} A_j\langle\mathcal{F}\rangle$ ein Fundamentalbereich für diese Gruppe ist, und skizzieren Sie diesen.
3. Bestimmen Sie die Spitzenklassen bzgl. Γ_1 (bzw. bzgl. Γ_2), und geben Sie jeweils Vertreter dieser Spitzenklassen an.