

Ein Algorithmus zum Berechnen von Hecke-Operatoren auf Drinfeldschen Modulformen

Ralf Butenuth

August 2007

Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik
Universität Duisburg-Essen

Betreut von Prof. Dr. G. Böckle

Vorwort

J.T. Teitelbaum hat in seinem Artikel [Te1] mit Hilfe einer Residuen-Abbildung eine explizite Beschreibung von Drinfeldschen Modulformen zu einer p' -torsionsfreien Kongruenzuntergruppe Γ_u gegeben. Diese können interpretiert werden als harmonische Kozykel auf den gerichteten Kanten des Bruhat-Tits-Baumes zu $\mathrm{PGL}_2(K_\infty)$. Die Residuen-Abbildung ist verträglich mit der Operation der Hecke-Algebra, so dass die Hecke-Operatoren auf harmonische Kozykel übertragen werden können. Ein Beweis findet sich in [Bö].

Da ein harmonischer Kozykel eindeutig bestimmt ist durch seine Werte auf einer endlichen Menge von Kanten, liefert uns dieser Zugang einen Algorithmus zum Berechnen der Hecke-Operatoren. Dazu müssen wir zunächst den Bruhat-Tits-Baum und seine Quotienten modulo Kongruenzuntergruppen verstehen.

In Kapitel 1 wird der Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T} definiert und eine Darstellung der Knoten und Kanten des Baumes durch Matrizen gegeben. Danach wird ein Algorithmus zum Berechnen der Quotienten $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ vorgestellt. Der größte Teil dieses Kapitels beruht auf dem Buch [Se] von J.P. Serre. Der Beweis von Satz 1.19 stammt aus [Tr].

In Kapitel 2 untersuchen wir die Struktur der Quotientengraphen $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$. Dies liefert für $A = \mathbb{F}_q[T]$ in den meisten Fällen eine explizite Basis des Raumes der harmonischen Kozykel. Auf diesem Weg leiten wir auch die bereits aus dem Beispiel [Te1] bekannten Dimensionsformeln auf elementare Weise her. Über die Struktur des Quotientengraphen $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ für Γ_u eine der Kongruenzuntergruppen $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma(N)$ wird dabei viel nützliches, auch und gerade im Hinblick auf die beabsichtigte Implementation der Rechnungen auf dem Computer, zusammengetragen. Unter anderem wird die lokale Struktur in der Nähe von Knoten des Quotientengraphen komplett geklärt. Die Ergebnisse sind zwar wohl nicht unerwartet, aber scheinen bisher nicht explizit in der Literatur vorhanden zu sein. Hieraus ergibt sich insbesondere, dass das Bild des 'stabilen Teils' im Quotientengraphen stets zusammenhängend ist. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die Euler-Poincaré-Charakteristik einer Kongruenzuntergruppe, auf die ebenfalls in Kapitel 2 eingegangen wird.

Viele Aussagen aus diesem Kapitel beruhen auf der Arbeit [Te1] von J.T. Teitelbaum. Einige Resultate aus Abschnitt 2.3 finden sich wieder in [Se].

In Kapitel 3 schließlich definieren wir die Hecke-Operatoren T_p als Abbildungen auf harmonischen Kozykeln. Wir zeigen, wie diese Operatoren berechnet werden können und erhalten so eine Darstellungsmatrix von T_p bezüglich der Basis aus Kapitel 2.

Über die Entwicklung und explizite Beschreibung dieses Algorithmus hinaus war ein Schwerpunkt der Arbeit die Implementation am Computer. Dazu wurde das Computer Algebra System Magma in der Version 2.11-8 verwendet, welches unter

<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/> erhältlich ist. Neben der Berechnung der Hecke-Operatoren und ihrer Eigenwerte liefern die Programme auch eine Funktion zur Ausgabe der Quotientengraphen des Bruhat-Tits-Baumes. Diese können im Postscript-Format ausgegeben werden. Zum Zeichnen der Graphen wurde das Programm Graphviz, ein Open-Source-Projekt der Firma AT&T, verwendet, welches unter <http://www.graphviz.org/> erhältlich ist.

Wie bei einem Projekt dieser Größe üblich, nahmen Implementation, Test und Fehlersuche die mit Abstand größte Zeit in Anspruch. Da die Komplexität der Algorithmen sehr schnell zu groß wird, können wir im Anhang nur ein paar Tabellen für kleine q und einer Stufe N kleinen Grades angeben. Die meisten Tabellen scheinen mir fehlerfrei und stimmen mit bisherigen Experimenten überein. Allerdings übernehme ich keinerlei Garantie für die Richtigkeit der gesamten Implementationen und aller Tabellen. In einem weiteren

Anhang sind ein paar Beispiele von Graphen zu größerer Stufe angegeben. Diese Beispiele zeigen, wie schnell die Komplexität steigt. Die Berechnungen wurden durchgeführt auf einem Intel Core 2 Duo Rechner mit 1.66 MHz und 2 GB Arbeitsspeicher. Sämtliche Quelltexte werden auf der Internet-Seite <http://www.uni-due.de/arith-geom/butenuth/> unter einer freien Lizenz bereitgestellt.

Eine genauere Interpretation der Daten, insbesondere eine Zerlegung der Räume der harmonischen Kozykel in gemeinsame invariante Unterräume der verschiedenen miteinander kommutierenden Operatoren T_p und eine andere Interpretation der Hecke-Operatoren, die von Hecke-Charakteren kommen, war in der vorgegebenen Zeit leider nicht mehr möglich. Aufgrund der theoretischen Resultate in einem Preprint von Böckle sind die Eigenwertssysteme kuspider Drinfeldscher Eigenformen durch geeignet definierte Hecke-Charaktere gegeben. Die Berechnungen in dieser Arbeit sollten es ermöglichen, diese Charaktere in den betrachteten Fällen explizit zu bestimmen. Dies soll im Anschluss an die Arbeit noch geschehen.

Die vorliegende Arbeit ist am Fachbereich Mathematik der Universität Duisburg-Essen, am Campus Essen, unter der Betreuung von Professor Dr. Gebhard Böckle entstanden. Bei ihm möchte ich mich hiermit für die herausragende Betreuung, seinen unermüdlichen Einsatz und seine Geduld bei meinem mitunter lahmen Verständnis bedanken.

Ein großer Dank gilt auch meinen Eltern, ohne deren kontinuierliche moralische und finanzielle Unterstützung diese Arbeit und das gesamte Studium mir nicht möglich gewesen wären.

Bedanken möchte ich mich auch bei Frau cand. math. Jasmin Matz für das Korrekturlesen der gesamten Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Inhaltsverzeichnis	3
Abbildungsverzeichnis	5
1 Quotienten des Bruhat-Tits-Baumes	6
1.1 Der Bruhat-Tits-Baum für $\mathrm{PGL}_2(K_\infty)$	6
1.2 Quotient von \mathcal{T} modulo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$	10
1.3 Kongruenzuntergruppen zu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$	13
1.4 Berechnung von $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ für $[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma_u] < \infty$	15
1.5 Einige einfache Beispiele	16
1.6 Abbruchbedingung	19
1.7 Algorithmische Aspekte, Laufzeiten	19
1.7.1 $\Gamma_0(N)$	19
1.7.2 $\Gamma(N)$	22
1.7.3 $\Gamma_1(N)$	24
1.7.4 Laufzeiten	24
1.8 Motivation 1	25
2 Harmonische Kozykeln	26
2.1 Kozykeln	26
2.2 Stabile Knoten	28
2.3 Euler-Poincaré-Charakteristik	31
2.4 Die Struktur des Quotientengraphen	39
2.4.1 $\Gamma(N)$	39
2.4.2 $\Gamma_1(N)$	43
2.4.3 $q = 2, \Gamma_0(N)$	48
2.5 Die Source einer instabilen Kante	51
2.6 Der Träger eines Kozykels	54
2.7 Explizite Beschreibung von $C_{har}(\Gamma_u, k)$	55
2.8 Motivation II	58
2.9 $q \neq 2, \Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)$	60
2.9.1 Bestimmung eines Repräsentantensystems	60
2.9.2 Die Struktur des Quotientengraphen	61
2.9.3 Berechnung von $C_{har}(\Gamma_0(N), k)$	63
3 Hecke-Operatoren	64
3.1 Die Operatoren T_p	64
3.2 Berechnung von T_p	67
3.2.1 Berechnung von $(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \setminus \Gamma_u$	67
3.2.2 Berechnung der Operatoren	67
3.2.3 Beispiel $q = 2, \Gamma_u = \Gamma_1(T), p = T + 1$	69
3.3 Berechnung von Hecke-Eigenwerten	70
A Tabellen für $\Gamma_1(N)$	72
B Tabellen für $\Gamma(N)$	76

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	4
C Beispiele einiger komplexerer Graphen	78
Literaturverzeichnis	81

Abbildungsverzeichnis

1	Der Bruhat-Tits-Baum für $k = \mathbb{F}_3$	8
2	Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	17
3	Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T^2) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	18
4	Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T * (T^2 + 1)) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_3$	30
5	Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T^2 + T + 1) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	38
6	Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T) \backslash \mathcal{T}$	39
7	Der Quotientengraph von $\Gamma(T) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_4$	39
8	Der Quotientengraph von $\Gamma(T^2) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	41
9	Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^2 * (T + 1)) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	46
10	Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^2) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	57
11	Der Quotientengraph von $(\Gamma_0(T^2 + 1) \cap \Gamma_1(T)) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_3$	62
12	Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^4) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	78
13	Der Quotientengraph von $\Gamma(T^3) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$	79
14	Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^3 + T) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_4$	80

1 Quotienten des Bruhat-Tits-Baumes

In diesem Kapitel werden wir einen Graphen \mathcal{T} definieren, den wir den Bruhat-Tits-Baum (kurz: BT-Baum) für $\mathrm{PGL}_2(K_\infty)$ nennen, wobei K_∞ die Vervollständigung des Körpers der rationalen Funktionen in einer Variable über \mathbb{F}_q ist. Wir werden zeigen, dass dies ein $q+1$ -regulärer Baum ist. Er besitzt eine natürliche Operation der $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$, und wir werden sehen, wie man die Quotientenbäume $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$, mit Γ_u eine Kongruenzuntergruppe der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[[T]])$, berechnen kann. Dieses Kapitel beruht stark auf den Resultaten aus dem Buch [Se] von J.P. Serre. Der Beweis von Satz 1.19 stammt aus [Tr].

1.1 Der Bruhat-Tits-Baum für $\mathrm{PGL}_2(K_\infty)$

Sei $k := \mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen in Charakteristik p . Sei $K = \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_q[[T]])$ der Quotientenkörper zu $\mathbb{F}_q[[T]]$. Sei v_∞ die zur Stelle ∞ gehörende Bewertung von K , und sei K_∞ die Vervollständigung von K bezüglich v_∞ . Also ist $K_\infty = \mathbb{F}_q((\pi_\infty))$ der Körper der formalen Laurentreihen in π_∞ , wobei π_∞ die Ortsuniformisierende T^{-1} ist.

Sei $\mathcal{O}_\infty := \{x \in K_\infty \mid v_\infty(x) \geq 0\}$ der Bewertungsring zu v_∞ in K_∞ . Es gilt also $\mathcal{O}_\infty/\pi_\infty \mathcal{O}_\infty \cong k$.

Definition 1.1 (Definition des BT-Baums) Die Knoten des Graphen \mathcal{T} seien die Äquivalenzklassen von \mathcal{O}_∞ -Gittern in K_∞^2 , wobei zwei \mathcal{O}_∞ -Gitter L und L' äquivalent heißen, falls es ein $x \in K_\infty^\times$ gibt mit $L' = xL$. Wir schreiben $X(\mathcal{T})$ für die Knotenmenge. Seien Λ, Λ' zwei Gitterklassen und $L \in \Lambda$. Wir nennen die Gitterklassen benachbart, falls ein $L' \in \Lambda'$ existiert mit $L' \subseteq L$ und L/L' ist ein \mathcal{O}_∞ -Modul der Länge 1, also falls $L/L' \simeq \mathcal{O}_\infty/\pi_\infty \mathcal{O}_\infty$ gilt.

Zwei Gitterklassen sollen nun genau dann durch eine Kante verbunden sein, falls sie benachbart sind. Wir schreiben $Y(\mathcal{T})$ für die Menge der geordneten Paare benachbarter Knoten, also für die Menge der gerichteten Kanten des Baums.

Lemma 1.2 Sei L ein \mathcal{O}_∞ -Gitter in K_∞^2 . Dann existiert in jeder Äquivalenzklasse von Gittern Λ' genau ein Gitter L' mit $L' \subseteq L$ und $L' \not\subseteq \pi_\infty L$.

BEWEIS: Sei $\Lambda' = [L'']$. Nach dem Elementarteilersatz gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen a, b und eine \mathcal{O}_∞ -Basis $\{e_1, e_2\}$ von L , so dass $\{e_1 \pi_\infty^a, e_2 \pi_\infty^b\}$ eine \mathcal{O}_∞ -Basis von L'' ist. Es ist $L' \subseteq L$ genau dann, wenn a und $b \geq 0$ sind. Für $x \in K_\infty^\times$ ist $xL'' = \langle x \pi_\infty^a e_1, x \pi_\infty^b e_2 \rangle = \langle \pi_\infty^{v(x)+a} e_1, \pi_\infty^{v(x)+b} e_2 \rangle$. Die Gitter in einer Klasse unterscheiden sich also nur um π_∞ -Potenzen. Das gesuchte Gitter L' erhalten wir, indem wir L'' mit $\pi_\infty^{-\min(a,b)}$ multiplizieren. ■

Satz 1.3 Jeder artinsche und noethersche Modul besitzt eine Zerlegungsreihe.

BEWEIS: Siehe [Ja, Theorem 3.5]. ■

Definition 1.4 Seien L, L' zwei Gitter mit $L' \subseteq L$. Dann bezeichne $l(L/L')$ die Länge einer Zerlegungsreihe von L/L' . Nach dem Satz von Jordan-Hölder ([Ja, Kapitel 3.3]) ist diese Länge eindeutig bestimmt.

Definition 1.5 Zu zwei Gitternklassen $\Lambda = [L]$ und $\Lambda' = [L']$ mit $\{e_1, e_2\}$ einer Basis von L und $\{\pi_\infty^a e_1, \pi_\infty^b e_2\}$ einer Basis von L' wie in 1.2 sei $|a - b| =: d(\Lambda, \Lambda')$ der Abstand der Gitterklassen Λ und Λ' .

Dieser Abstand ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten L und L' : Für $x, y \in K_\infty^*$ gilt $xL = \langle xe_1, xe_2 \rangle = \langle \pi_\infty^{v(x)} e_1, \pi_\infty^{v(x)} e_2 \rangle$ und $yL' = \langle y\pi_\infty^a e_1, y\pi_\infty^b e_2 \rangle = \langle \pi_\infty^{v(y)+a-v(x)} \pi_\infty^{v(x)} e_1, \pi_\infty^{v(y)+b-v(x)} \pi_\infty^{v(x)} e_2 \rangle$. Der Abstand mit den Repräsentanten xL und yL' berechnet ist also $|v(y) + a - v(x) - v(y) - b + v(x)| = |a - b|$.

Satz 1.6 \mathcal{T} ist ein $q + 1$ -regulärer Baum, also ein zyklischer, zusammenhängender Graph, bei dem jeder Knoten $q + 1$ Nachbarknoten hat.

BEWEIS: 1) \mathcal{T} ist zusammenhängend:

Seien Λ, Λ' zwei Gitterklassen, und $L \in \Lambda$. Nach Lemma 1.2 existiert ein Gitter $L' \in \Lambda'$ mit $L' \subseteq L$ und $L' \not\subseteq \pi_\infty L$. Nach Satz 1.3 existiert nun eine Zerlegungsreihe $L' = L_n \subseteq L_{n-1} \subseteq \dots \subseteq L_0 = L$, so dass jeweils L_{i-1}/L_i keine nichttrivialen Untermoduln besitzt. Daher sind $[L_{i-1}]$ und $[L_i]$ im Graphen benachbart. Wir haben also einen Pfad von $[\Lambda]$ nach $[\Lambda']$ für beliebige Gitterklassen gefunden, \mathcal{T} ist somit zusammenhängend.

2) \mathcal{T} ist zyklischerfrei:

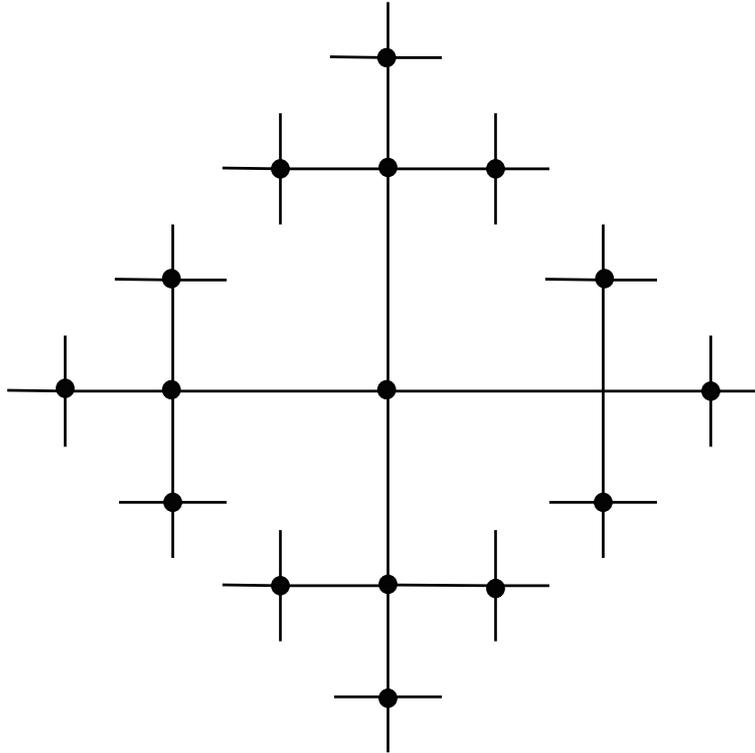
Es reicht, zu zeigen, dass für einen Pfad $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ ohne Backtracking in \mathcal{T} gilt $\Lambda_0 \neq \Lambda_n$. Nach 1) können wir Repräsentanten L_i zu Λ_i finden mit $L_{i+1} \subseteq L_i$ und $l(L_i/L_{i+1}) = 1$. Also gilt $l(L_0/L_n) = n$, und wir müssen zeigen, dass $L_n \not\subseteq \pi_\infty L_0$ ist. Per Induktion können wir annehmen, dass $L_{n-1} \not\subseteq \pi_\infty L_0$ ist. Es gilt nun $\pi_\infty L_{n-2} \neq L_n$, da sonst $\Lambda_{n-2} = \Lambda_n$ wäre, wir also sonst ein direktes Backtracking $\Lambda_n - \Lambda_{n-1} - \Lambda_n$ in unserem Pfad hätten. Also gilt $L_{n-1} = L_n + \pi_\infty L_{n-2}$, also $L_{n-1} \equiv L_n \pmod{\pi_\infty L_0}$, und somit folgt $L_n \not\subseteq \pi_\infty L_0$.

Wir haben gleichzeitig gezeigt, dass der Abstand zweier Knoten Λ, Λ' im graphentheoretischen Sinne der gleiche ist, wie der Abstand $d(\Lambda, \Lambda')$ zweier Gitterklassen aus Definition 1.5.

3) \mathcal{T} ist $q + 1$ -regulär:

Sei L_0 ein Gitter und $\Lambda_0 \in X(\mathcal{T})$ der dazugehörige Knoten. Jeder Knoten in $X(\mathcal{T})$ hat nach Lemma 1.2 einen eindeutigen Repräsentanten $L \subseteq L_0$ mit $L_0/L \cong \mathcal{O}_\infty/\pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty$ und $n = d(\Lambda_0, \Lambda)$. Der $\mathcal{O}_\infty/\pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty$ -Modul $L_0/\pi_\infty^n L_0$ ist frei von Rang 2, und $L/\pi_\infty^n L_0$ ist ein direkter Faktor von Rang 1. Die Knoten Λ von \mathcal{T} mit $d(\Lambda_0, \Lambda) = n$ entsprechen also bijektiv den Faktormoduln von $L_0/\pi_\infty^n L_0$ von Rang 1 über $\mathcal{O}_\infty/\pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty$, also den Punkten auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}(L_0/\pi_\infty^n L_0) \cong \mathbb{P}^1(\mathcal{O}_\infty/\pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty)$. Die Nachbarknoten eines beliebigen Knotens Λ_0 entsprechen dann bijektiv den Punkten von $\mathbb{P}(L_0/\pi_\infty L_0) \cong \mathbb{P}^1(\mathcal{O}_\infty/\pi_\infty \mathcal{O}_\infty) \cong \mathbb{P}^1(k)$. Folglich hat jeder Knoten genau $q + 1$ verschiedene Nachbarknoten. ■

Bemerkung 1.7 Einen unendlichen Pfad ohne Zurücklaufen mit Anfangsknoten Λ_0 nennen wir ein Ende von \mathcal{T} . Nach obiger Rechnung sind die Enden des Graphen \mathcal{T} isomorph zum projektiven Limes über die $\mathbb{P}(L_0/\pi_\infty^n L_0)$, also isomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_\infty) = \mathbb{P}^1(K_\infty)$. Die Enden sind nicht abhängig von der Wahl des Startknotens Λ_0 .

Abbildung 1: Der Bruhat-Tits-Baum für $k = \mathbb{F}_3$

Wir kennen nun die Struktur des Baumes \mathcal{T} . Um eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ auf dem Baum \mathcal{T} zu erhalten, und für dessen Darstellung im Computer werden wir nun die Knoten und Kanten durch Nebenklassen von Matrizen beschreiben:

Satz 1.8 *Es gibt eine kanonische Bijektion*

$$\begin{aligned} X(\mathcal{T}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(K_\infty)/\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)K_\infty^* \\ \Lambda &\mapsto \gamma \end{aligned}$$

BEWEIS: Sei $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von K_∞^2 , und $L = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ ein Vertreter eines Knotens $\Lambda := [L] \in X(\mathcal{T})$. Dann ist $(\omega_1, \omega_2) = (e_1, e_2)\gamma$ mit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(K_\infty)$. Das Gitter \mathcal{O}_∞^2 wird genau durch Multiplikation von rechts mit den Elementen aus $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)$ in sich übergeführt und durch Multiplikation mit einem Skalar aus K_∞^* bleiben wir in der selben Gitterklasse. Also ist

$$\begin{aligned} X(\mathcal{T}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(K_\infty)/\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)K_\infty^* \\ \Lambda &\mapsto \gamma \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Bijektion. ■

Definition 1.9 Sei $\Gamma_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty) \mid v_\infty(c) > 0 \right\}$

Satz 1.10 *Es gibt ein Bijektion*

$$\begin{aligned} Y(\mathcal{T}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \\ (\Lambda_1, \Lambda_0) &\mapsto \gamma \end{aligned}$$

BEWEIS: Seien Λ_0 und Λ_1 zwei benachbarte Knoten und sei (Λ_1, Λ_0) die Kante von Λ_1 nach Λ_0 . Wie im Beweis zu 1.6 finden wir Repräsentanten L_0, L_1 von Λ_0 und Λ_1 mit $\Lambda_0 = [L_0] = [\mathcal{O}_\infty^2 \gamma]$ und $\Lambda_1 = [L_1] = [(\mathcal{O}_\infty \oplus \pi_\infty \mathcal{O}_\infty) \gamma]$ für eine Matrix $\gamma \in \mathrm{GL}_2(K_\infty)$. Die Kante von \mathcal{O}_∞^2 nach $\mathcal{O}_\infty \oplus \pi_\infty \mathcal{O}_\infty$ wird genau von Γ_∞ festgelassen und Multiplikation mit Skalaren aus K_∞ ändert wiederum nichts an den Gitterklassen. Insgesamt folgt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} Y(\mathcal{T}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(K_\infty)/\Gamma_\infty K_\infty^* \\ (\Lambda_1, \Lambda_0) &\mapsto \gamma \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

■

Durch Linksmultiplikation erhalten wir eine natürliche Operation von $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ auf den Knoten und Kanten des Baumes. Die Inklusion $\Gamma_\infty \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)$ ordnet jeder gerichteten Kante $e \in Y(\mathcal{T})$ ihren Endpunkt $t(e) \in X(\mathcal{T})$ zu und ist mit der Operation von $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ verträglich. Also erhalten wir eine Operation von $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ auf \mathcal{T} .

Für eine Untergruppe G von $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ definieren wir Stabilisatoren zu Knoten und Kanten:

Definition 1.11 *Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$, Λ, Λ' Gitterklassen, L ein Gitter, dann definieren wir*

- (a) $G_L := \mathrm{Stab}_G(L)$
- (b) $G_\Lambda := \mathrm{Stab}_G(\Lambda)$
- (c) $G_{(\Lambda, \Lambda')} := \mathrm{Stab}_G((\Lambda, \Lambda')) = \mathrm{Stab}_G(\Lambda) \cap \mathrm{Stab}_G(\Lambda')$

Definition 1.12 *Für zwei Gitter L, L' setzen wir $\chi(L, L') := l(L/L'') - l(L'/L'')$ mit $L'' = L \cap L'$. Das Gitter L'' kann durch ein beliebiges Untergitter von $L \cap L'$ ersetzt werden.*

Lemma 1.13 (a) *Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Sei $L \in \Lambda$. Dann ist $\mathrm{Stab}_G(\Lambda) = \mathrm{Stab}_G(L)$.*

- (b) *Sei $s \in \mathrm{GL}_2(K_\infty)$. Dann gilt $\chi(L, sL) = v_\infty(\det(s))$*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst (b):

Dazu können wir wie im Beweis zu 1.2 eine Basis $\{e_1, e_2\}$ von L wählen, so dass $\{\pi_\infty^a e_1, \pi_\infty^b e_2\}$ eine Basis von sL ist. Dann gilt $s = \begin{pmatrix} \pi_\infty^a & 0 \\ 0 & \pi_\infty^b \end{pmatrix} s'$ mit $s' \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)$.

Also ist $v_\infty(\det(s)) = v_\infty(\pi_\infty^{a+b}) + \underbrace{v_\infty(\det(s'))}_{=0} = a + b$. Man rechnet nun schnell nach,

dass in den vier Fällen $a, b \geq 0$; $a, b < 0$; $a < 0, b \geq 0$ und $a \geq 0, b < 0$ jeweils ebenfalls $\chi(L, sL) = a + b$ gilt. Damit ist (b) gezeigt.

Sei jetzt $s \in G_\Lambda$. Dann ist $\chi(L, sL) = v_\infty(\det(s)) = 0$, da $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ gewählt war. Da s die Gitterklasse Λ festlässt, finden wir also ein $x \in K_\infty^*$ mit $sL = xL$ und es ist $0 = \chi(L, sL) = \chi(L, xL) = 2v_\infty(x)$. Somit ist $x \in \mathcal{O}_\infty^*$, also $L = xL = sL$, und also $s \in G_L$. Damit haben wir $G_\Lambda \subseteq G_L$ gezeigt. $G_L \subseteq G_\Lambda$ gilt trivialerweise, also gilt insgesamt $G_\Lambda = G_L$. ■

Bemerkung 1.14 Es gilt $d(\Lambda, s\Lambda) \equiv v_\infty(\det(s)) \pmod{2}$.

BEWEIS: Wie im Beweis von Lemma 1.13 mit der selben Notation gilt $v_\infty(\det(s)) = a + b$. Nach Definition gilt $d(\Lambda, s\Lambda) = |a - b|$ und es ist $|a - b| \equiv a + b \pmod{2}$. ■

Diese Bemerkung zeigt uns, dass für Untergruppen der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ die Operation der Gruppe auf dem Graphen die Orientierung der Kanten enthält. Für eine Matrix $s \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ gilt $v_\infty(\det(s)) = 0$, also gilt $d(\Lambda, s\Lambda) \equiv 0 \pmod{2}$. Sei Λ ein beliebig gewählter Knoten. Wir teilen die Knoten $X(\mathcal{T})$ in zwei Klassen X_+ und X_- auf mit $\Lambda' \in X_+$ genau dann, wenn $d(\Lambda, \Lambda')$ gerade ist. Dann erhält $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ die Einteilung und damit auch die Orientierung der Kanten.

1.2 Quotient von \mathcal{T} modulo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$

Der Quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathcal{T}$ hat eine besonders einfache Form als Halbgerade. Dies wird uns eine Einteilung von Knoten nach ihrer Lage auf der Geraden im Quotientengraph geben. Ausserdem wird dieser Fundamentalbereich der Schlüssel zum Berechnen von Quotientengraphen von \mathcal{T} nach Kongruenzuntergruppen der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ sein. Diese Quotientengraphen können wir dann als Überlagerungen der Halbgerade auffassen.

Definition 1.15 Sei $G_0 := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ und

$$G_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q[T], \deg(b) \leq n \right\}$$

Definition 1.16 Sei $L_n := \langle \mathcal{O}_\infty \oplus \pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty \rangle$ für $n \geq 0$ und $\Lambda_n := [L_n]$.

Satz 1.17 (a) Die Gitter Λ_n sind paarweise inäquivalent modulo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$.

(b) G_n ist der Stabilisator von Λ_n in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$.

(c) G_0 operiert transitiv auf den Kanten mit Ursprung Λ_0 .

(d) Für $n \geq 1$ lässt G_n die Kante $(\Lambda_n, \Lambda_{n+1})$ fest und operiert transitiv auf den anderen Kanten mit Ursprung Λ_n .

BEWEIS: (a) Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ mit $\gamma\Lambda_n = \Lambda_{n+m}$ und sei $L'_n := \langle T^n \mathcal{O}_\infty \oplus \mathcal{O}_\infty \rangle \in \Lambda_n$ ein Repräsentant der Gitterklasse. Wie im Beweis von Lemma 1.2 ist dann $\gamma L'_n = L_{n+m} T^{-h} = \langle T^{n+m-h} \mathcal{O}_\infty \oplus T^{-h} \mathcal{O}_\infty \rangle$ für ein $h \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 1.13 gilt dann

$$m - 2h = \chi(L'_n, L_{n+m} T^{-h}) = \chi(L'_n, \gamma L'_n) = v_\infty(\det(\gamma)) = 0.$$

Also folgt $m = 2h$. Aus $\gamma L'_n = L'_{n+2h} T^{-h}$ folgt aber sofort $\deg(a) \leq h, \deg(b) \leq n + h, \deg(c) \leq (n - h)$ und $\deg(d) \leq -h$. Da a und d beide aus $\mathbb{F}_q[T]$ waren, folgt $h = 0$, und damit die Aussage (a).

(b) Für $n = 0$ folgt $\deg(a) = \deg(b) = \deg(c) = \deg(d) = 0$, also $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Für $n \geq 1$ folgt $\deg(c) \leq -n$, also $c = 0$, $\deg(a) = \deg(d) = 0$ und $\deg(b) \leq n$, also insgesamt $\gamma \in G_n$.

(c) Wir haben im Beweis von Satz 1.6 gesehen, dass die Kanten mit Ursprung Λ_0 der Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ entsprechen. Da $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ transitiv auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ operiert, folgt (c).

(d) Die erste Aussage ist klar, da G_n in G_{n+1} enthalten ist. Für die zweite Aussage betrachten wir die Operation von G_n auf $L'_n/L'_n T^{-1} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. Auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ ist diese Operation durch obere Dreiecksmatrizen aus $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ gegeben. Diese fixieren genau einen Punkt von $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ und operieren transitiv auf den anderen q Punkten.

■

Wir haben in Satz 1.8 gesehen, dass wir die Knoten des BT-Baumes mit Matrizen modulo $\text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)K_\infty^*$ beschreiben können. Das nächste Lemma ist sehr nützlich, da es uns eine Normalform für die Matrizen liefert. Der Beweis ist konstruktiv.

Lemma 1.18 *Die Abbildung $\left\{ \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}, y \bmod \pi_\infty^n \right\} \longrightarrow X(\mathcal{T}) : A \mapsto [A\mathcal{O}_\infty^2]$ ist eine Bijektion.*

BEWEIS: Ein Knoten in $X(\mathcal{T})$ ist nach 1.8 eine Nebenklasse einer Matrix aus $\text{GL}_2(K_\infty)$ modulo $\text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)K_\infty^*$. Sei $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ ein Vertreter einer Nebenklasse. Wir bleiben in der selben Nebenklasse, wenn wir von rechts mit Matrizen aus $\text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)K_\infty^*$ operieren. Ist nun $v_\infty(x_3) < v_\infty(x_4)$, so multiplizieren wir von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und vertauschen damit die beiden Spalten. Wir können also annehmen, dass $v_\infty(x_3) \geq v_\infty(x_4)$ ist. Multiplikation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_3}{x_4} & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)$ ergibt

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_3}{x_4} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2 x_3}{x_4} & x_2 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit $x_4^{-1} \in K_\infty^*$ ergibt einen Vertreter der Gestalt $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir schreiben

$z_1 = \pi_\infty^n \varepsilon$ mit eindeutigem $n \in \mathbb{Z}, \varepsilon \in \mathcal{O}_\infty^*$. Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$

$\text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)$ ergibt also einen Vertreter der Form $\begin{pmatrix} \pi_\infty^n & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Gilt nun

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^m \alpha + b\gamma & \pi_\infty^m \beta + b\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

mit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)K_\infty^*$, so folgt aus der unteren Zeile $\delta = 1, \gamma = 0$ und anschließend $\alpha = 1$ und $m = n$. Der Eintrag oben rechts ist also bis auf Elemente aus $\pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty$ eindeutig bestimmt. ■

Satz 1.19 *Es ist $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathcal{T}$ die Halbgerade $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \dots$*

BEWEIS: Wir können von links mit Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ operieren. Nach Lemma 1.18 brauchen wir nur Knoten vom Typ $\begin{pmatrix} \pi_\infty^n & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $n \in \mathbb{Z}, y \in K_\infty$ betrachten. Da y nur modulo $\pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty$ bestimmt ist, können wir $y = P + y_0$ schreiben, mit $P \in \mathbb{F}_q[T]$ und $y_0 \in K_\infty$ mit $0 < v_\infty(y_0) < n$. Es ist dann $\begin{pmatrix} \pi_\infty^n & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & P + y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & P + y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Fall 1: $n \leq 0$: Wegen der Bedingung $0 < v_\infty(y_0) < n$ ist hier $y_0 = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^{-n} & 0 \\ 0 & \pi_\infty^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fall 2: $n > 0$: Es gilt $0 < v_\infty(y_0) < n$, also ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty^n & y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\infty^n & y_0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\infty^n & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi_\infty^n y_0^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} -\pi_\infty^n y_0^{-1} & 1 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\pi_\infty^n y_0^{-1} & 1 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^{-1} & 0 \\ 0 & y_0^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi_\infty^n y_0^{-2} & y_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\begin{pmatrix} \pi_\infty^{n-2v_\infty(y_0)} & y_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist jetzt entweder $n \leq 2v_\infty(y_0)$, dann sind wir wieder im ersten Fall, oder es ist $0 < n - 2v_\infty(y_0) < n$. Dann sind wir in Fall 2 mit einem Vertreter mit echt kleinerer Bewertung n des Eintrags links oben. Da n in jedem Schritt echt kleiner wird, kommen wir irgendwann zwangsläufig in den ersten Fall.

Wir haben also zu jedem Knoten einen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ -äquivalenten Knoten der Form $\left[\begin{pmatrix} \pi_\infty^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gefunden. Diesen Vertreter können wir durch Multiplikation von

links und rechts mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf die Form $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix} \right]$ bringen. Diese Knoten entsprechen den Standard-Gittern Λ_n aus 1.16. Nach Satz 1.17a) sind die Gitter Λ_n paarweise inäquivalent unter der Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Da die Gitter $\mathcal{O}_\infty \oplus \pi_\infty^n \mathcal{O}_\infty$ und $\mathcal{O}_\infty \oplus \pi_\infty^{n+1} \mathcal{O}_\infty$ Distanz 1 haben, also die zugehörigen Knoten im Graphen verbunden sind, ist insgesamt $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathcal{T}$ genau die Halbgerade $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \dots$

■

Definition 1.20 *Sei $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathcal{T}$ die Projektion. Dann heißt $x \in X(\mathcal{T})$ ein Knoten vom Typ n falls $\pi(n)$ der n -te Knoten in der Halbgerade ist.*

Anders ausgedrückt sind Knoten vom Typ n also $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ -äquivalent zu $\Lambda_n = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^n \end{pmatrix} \right]$. Der Beweis von 1.19 war konstruktiv und liefert uns ein einfaches Verfahren, um den Typ eines Knotens zu bestimmen.

1.3 Kongruenzuntergruppen zu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$

Definition 1.21 Sei N ein normiertes Polynom in $\mathbb{F}_q[T]$. Zu N definieren wir

$$\Gamma(N) := \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}\}$$

Eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$, die $\Gamma(N)$ für ein $N \in \mathbb{F}_q[T]$ enthält, heißt Kongruenzuntergruppe. Speziell seien

$$\Gamma_0(N) := \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \pmod{N}\}$$

und

$$\Gamma_1(N) := \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}\}$$

Es ist also $\Gamma(1) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Diese Notation wird im Folgenden manchmal benutzt.

Die Kongruenzuntergruppen sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ von endlichem Index, wie wir in Satz 1.24 zeigen werden. Die Quotientengraphen $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ für Γ_u eine Kongruenzuntergruppe sind Überlagerung des Graphen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \backslash \mathcal{T}$. Um sie auszurechnen, brauchen wir Vertretersysteme von $\Gamma_u \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Wir geben zunächst ein Vertretersystem von $\Gamma_0(N) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ an. Im Hinblick auf die explizite Implementation geben wir einen konstruktiven Beweis.

Lemma 1.22 Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ genau dann, wenn ein $w \in \mathbb{F}_q[T]$ existiert mit $\mathrm{ggT}(w, N) = 1$ und $c' \equiv wc \pmod{N}$, $d' \equiv wd \pmod{N}$.

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, dass für beliebige $a', b' \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\alpha' := a'd - b'c \in \mathbb{F}_q^*$ gilt $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Die Nebenklasse einer Matrix aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ hängt also nur von den Einträgen (c, d) ab.

Sei $\alpha := ad - bc$. Also ist $\beta := \alpha^{-1}\alpha' \in \mathbb{F}_q^*$ und es ist $a'd - b'c = \beta(ad - bc)$, also $d(\beta a - a') = c(\beta b - b')$ (\star). Multipliziert man (\star) mit a' und subtrahiert $b'c(\beta a - a')$ bekommt man die Gleichung $a'd(\beta a - a') - b'c(\beta a - a') = a'c(\beta b - b') - b'c(\beta a - a')$, also $\alpha'(\beta a - a') = c \underbrace{(a'(\beta b - b') - b'(\beta a - a'))}_{=: y}$. Multipliziert man (\star) mit b' und subtrahiert

es von $a'd(\beta b - b')$ bekommt man die Gleichung $a'd(\beta b - b') - b'd(\beta a - a') = a'd(\beta b - b') - b'c(\beta b - b')$, also gilt $dy = \alpha'(\beta b - b')$ und $cy = \alpha'(\beta a - a')$. Mit $x := \alpha'^{-1}y$ folgt also $dx = \beta b - b'$ und $cx = \beta a - a'$ und wir erhalten die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta a - cx & \beta b - dx \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \Gamma_0(N)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Da wir nun gezeigt haben, dass die Nebenklasse $\pmod{\Gamma_0(N)}$ nur von den unteren beiden Einträgen abhängt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 =$

$\det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ gilt. Wegen

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'd - b'c & ab' - a'b \\ c'd - d'c & ad' - c'b \end{pmatrix} =: A$$

ist also $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ genau dann in $\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, falls $c'd \equiv d'c \pmod{N}$ ist.

Falls ein $w \in \mathbb{F}_q[T]$ existiert mit $\text{ggT}(w, N) = 1$ und $c' \equiv wc \pmod{N}, d' \equiv wd \pmod{N}$, so existieren $u, v \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $c' - wc = uN, d' - wd = vN$, also ist $c'd - d'c = uNd + wcd - vNc - wcd = (ud - vc)N$, also $c'd \equiv d'c \pmod{N}$.

Gilt umgekehrt $c'd \equiv d'c \pmod{N}$, so definiere $w := ad' - c'b$. Es gilt dann $\text{ggT}(w, N) = 1$, da w der Eintrag rechts unten der Matrix A ist und $\det(A) \in \mathbb{F}_q^*$ ist und es ist $wc = acd' - bcc' \equiv (ad - bc)c' = c' \pmod{N}$ und $wd = add' - bc'd \equiv (ad - bc)d' = d' \pmod{N}$.

■

Korollar 1.23 *Es ist $\Gamma_0(N) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$.*

Satz 1.24 *Es ist $\Gamma(N) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$.*

BEWEIS: Sei $\Gamma'(N) := \Gamma(N) \cap \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Dann ist $\Gamma'(N)$ gerade der Kern des surjektiven Homomorphismus $\varphi : \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \twoheadrightarrow \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ (für die Surjektivität siehe Satz 1.33). Also ist $\Gamma'(N)$ ein Normalteiler in $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ und es ist $\Gamma'(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]) = \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$. Das Resultat für die $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ folgt nun aus

$$\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$$

■

Insbesondere ist der Index $[\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma(N)]$ endlich. Also haben alle Kongruenzuntergruppen endlichen Index in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$.

Satz 1.25 *Es ist $\Gamma_1(N) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \{(c, d) \in (\mathbb{F}_q[T]/N)^2 \mid \text{ggT}(c, d) = 1\}$*

BEWEIS: Die Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind ein Repräsentantensystem von $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ bezüglich des Normalteilers $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Die Paare $(c, d) \in (\mathbb{F}_q[T]/N)^2$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$ können wir ergänzen zu Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$. Dadurch kriegen wir eine transitive Operation der Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ auf der Menge $\{(c, d) \in (\mathbb{F}_q[T]/N)^2 \mid \text{ggT}(c, d) = 1\}$ und der Stabilisator von $(1, 1)$ besteht aus genau den Matrizen mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ und $a, d \equiv 1 \pmod{N}$, also gerade der $\Gamma_1(N)$. ■

1.4 Berechnung von $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ für $[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma_u] < \infty$

Der nächste Satz gibt an, wie man für Untergruppen Γ_u von endlichem Index in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ den Graphen $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ berechnet. Dabei wird der Satz so formuliert, dass direkt klar wird, wie der Algorithmus zu implementieren ist.

Satz 1.26 *Sei $\Gamma_u \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ von endlichem Index und $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ ein Vertretersystem von $\Gamma_u \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Sei Υ die Halbgrade $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \dots$. Sei $s_i(\Upsilon)$ die Halbgrade $s_i(\Lambda_0) \rightarrow s_i(\Lambda_1) \rightarrow s_i(\Lambda_2) \rightarrow \dots$. Dann erhält man den Graphen $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ indem man die Halbgeraden $s_1(\Upsilon)$ bis $s_m(\Upsilon)$ übereinander legt, und dann Knoten und Kanten nach den folgenden Regeln identifiziert:*

- (a) *Es werden nur Kanten und Knoten der gleichen Stufe identifiziert.*
- (b) *$s_i(\Lambda_n) \sim s_j(\Lambda_n)$ genau dann, wenn es ein $g \in G_n$ gibt mit $s_i g s_j^{-1} \in \Gamma_u$.*
- (c) *$s_i((\Lambda_0, \Lambda_1)) \sim s_j((\Lambda_0, \Lambda_1))$ genau dann, wenn es ein $g \in G_0 \cap G_1$ gibt mit $s_i g s_j^{-1} \in \Gamma_u$.*
- (d) *$s_i((\Lambda_n, \Lambda_{n+1})) \sim s_j((\Lambda_n, \Lambda_{n+1}))$ genau dann, wenn es ein $g \in G_n$ gibt mit $s_i g s_j^{-1} \in \Gamma_u$ für $n \geq 1$.*

BEWEIS: $U = \bigcup_{i=1}^m s_i(\Upsilon)$ enthält aus jeder Γ_u -Bahn von $X(\mathcal{T})$ bzw. von $Y(\mathcal{T})$ mindestens einen Vertreter. Also ist $\Gamma_u \setminus \mathcal{T} = \Gamma_u \setminus U$.

Zu (a) Angenommen $s_i(\Lambda_k) \sim s_j(\Lambda_l)$ mit $k \neq l$. Dann gibt es also ein $\gamma \in \Gamma_u$ mit $\gamma s_i \Lambda_k = s_j \Lambda_l$, also $\Lambda_l = s_j^{-1} \gamma s_i \Lambda_k$, was ein Widerspruch zu Satz 1.17(a) ist.

Zu (b) Es gilt $s_j(\Lambda_n) \sim s_i(\Lambda_n)$ genau dann, wenn ein $\gamma \in \Gamma_u$ existiert mit $\gamma s_j \Lambda_n = s_i \Lambda_n$, also $s_i^{-1} \gamma s_j \Lambda_n = \Lambda_n$. Nach Satz 1.17(b) gilt das genau dann, wenn $s_i^{-1} \gamma s_j \in G_n$ ist. Also folgt (b).

Zu (c) Analog zu (b), da die Fixgruppe von $(\Lambda_0, \Lambda_1) = G_0 \cap G_1$ ist.

Zu (d) Analog zu (b). Die Fixgruppe von $(\Lambda_n, \Lambda_{n+1})$ ist $G_n \cap G_{n+1} = G_n$. ■

Wir sehen bereits einiges über die Struktur des Graphen:

Bemerkung 1.27 (a) Für $n \geq 1$ gilt $G_n \subseteq G_{n+1}$. Fallen also zwei Knoten der Stufe n zusammen, so auch die zugehörigen Kanten zwischen der Stufe n und $n+1$ und alle weiteren Knoten und Kanten weiter aussen.

- (b) Der Graph $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ ist zusammenhängend, da er von \mathcal{T} überlagert wird.
- (c) An jedem Zykel im Quotientengraph ist genau ein Knoten der Stufe 0 beteiligt.
- (d) Der Graph $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ hat \tilde{m} Enden mit $1 \leq \tilde{m} \leq m$. Ein Ende des Quotientengraphen $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ nennen wir Spitze der Kongruenzuntergruppe Γ_u .
- (e) Der Graph $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ ist die Vereinigung eines endlichen, zusammenhängenden Graphen und endlich vieler Halbgeraden.

1.5 Einige einfache Beispiele

Um etwas vertrauter mit den BT-Bäumen zu werden, werden wir in diesem Abschnitt einige einfache Beispiele von Hand durchrechnen.

Beispiel 1.28 $q = 2, \Gamma_u = \Gamma_0(T)$

Ein Vertretersystem von $\Gamma_0(T) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2[T])$ ist nach Korollar 1.23 der $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2[T]/T) = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$, also die drei Tupel $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$. Diese ergänzen wir zu den Matrizen $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist $s_1^{-1} = s_1$, $s_2^{-1} = s_2$ und $s_3^{-1} = s_3$. Unsere Standardgerade $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \dots$ wird also von den drei Geraden

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi_\infty \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

überlagert.

Es ist $G_0 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$, also fallen die drei Knoten über Λ_0 zusammen.

Es ist $G_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{F}_2[T], \deg(m) \leq n \right\}$. Also gilt $\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = G_0 \cap G_1$.

Es ist

$$s_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(T)$$

, also fallen die Knoten $s_2(\Lambda_n)$ und $s_3(\Lambda_n)$ ab $n = 1$ ebenso zusammen wie die Kanten $(s_2(\Lambda_0), s_2(\Lambda_1))$ und $(s_3(\Lambda_0), s_3(\Lambda_1))$

Es ist für $m \in \mathbb{F}_q[T]$ beliebig

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \Gamma_0(T)$$

und

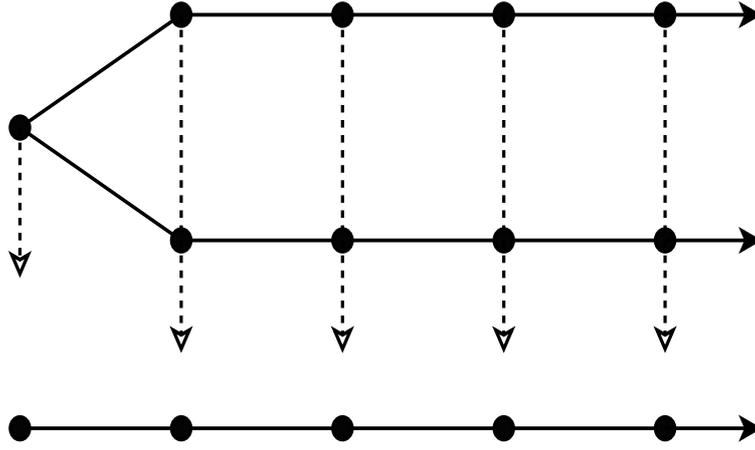
$$s_2 \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \notin \Gamma_0(T)$$

. Also fallen die Knoten $s_1(\Lambda_n)$ und $s_2(\Lambda_n)$ für kein $n \geq 1$ zusammen. Damit ist also klar, wie der Graph $\Gamma_0(T) \backslash \mathcal{T}$ aussieht, siehe Abbildung 2

Beispiel 1.29 $q = 2, \Gamma_u = \Gamma_0(T^2)$

Auch dieses Beispiel lässt sich noch einfach von Hand beherrschen. Ein Vertretersystem von $\Gamma_0(T^2) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2[T])$ ist der $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2[T]/T^2)$, also die Tupel $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(T, 1)$, $(T + 1, 1)$ und $(1, T)$, diese ergänzen wir zu den Matrizen

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T + 1 & 1 \end{pmatrix} s_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix}$$

Abbildung 2: Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

Es gilt dann $s_1^{-1} = s_1, s_2^{-1} = s_2, s_3^{-1} = s_3, s_4^{-1} = s_4, s_5^{-1} = s_5$ und $s_6^{-1} = \begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 Unsere Standardgerade $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \dots$ wird also von den sechs Geraden

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi_\infty \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

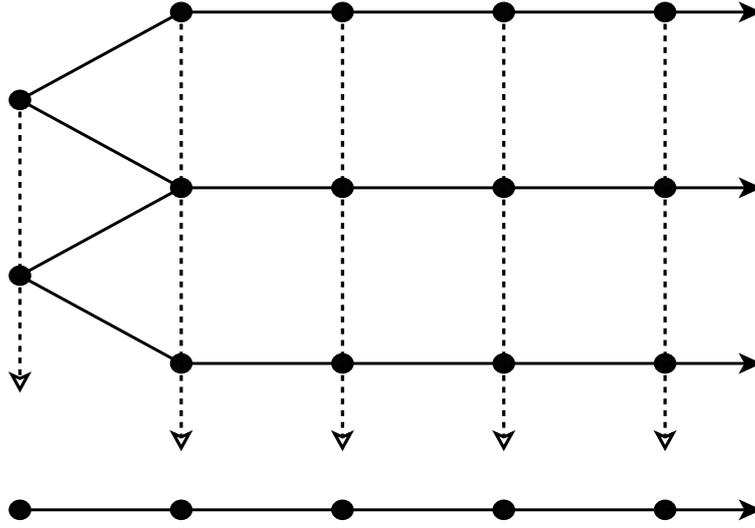
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi_\infty^{-1} & \pi_\infty \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi_\infty^{-2} & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi_\infty^{-1} + 1 & \pi_\infty \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi_\infty^{-1} + 1 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\infty^2 \\ 1 & \pi_\infty \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

überlagert.

Wie in Beispiel 1.28 fallen die drei Knoten $s_1(\Lambda_0), s_2(\Lambda_0)$ und $s_3(\Lambda_0)$ und die Kanten $(s_2(\Lambda_0), s_2(\Lambda_1))$ und $(s_3(\Lambda_0), s_3(\Lambda_1))$ mitsamt den Knoten $s_2(\Lambda_n), s_3(\Lambda_n)$ für $n \geq 1$ zusammen.

Abbildung 3: Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T^2) \setminus \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

Es ist

$$\begin{aligned} s_5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_6^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ T^2 & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(T^2) \end{aligned}$$

also fallen die Knoten $s_5(\Lambda_0)$ und $s_6(\Lambda_0)$ und die Kanten $(s_5(\Lambda_0), s_5(\Lambda_1))$ und $(s_6(\Lambda_0), s_6(\Lambda_1))$ mitsamt den Knoten $s_5(\Lambda_n), s_6(\Lambda_n)$ für $n \geq 1$ zusammen.

Man rechnet schnell nach, dass zwischen der nullten und ersten Stufe keine weiteren Kanten zusammen fallen.

Es ist

$$\begin{aligned} s_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} s_5^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(T^2) \end{aligned}$$

also fallen die Knoten $s_4(\Lambda_0)$ und $s_5(\Lambda_0)$ zusammen.

Man rechnet schnell nach, dass in der nullten Stufe keine weiteren Knoten zusammen fallen.

Es ist

$$\begin{aligned} s_2 \begin{pmatrix} 1 & T+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_5^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^2 & T+1 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ T^2 & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(T^2) \end{aligned}$$

also fallen die Knoten $s_2(\Lambda_n)$ und $s_5(\Lambda_n)$ für $n \geq 1$ zusammen.

Weitere Knoten und Kanten fallen nicht mehr zusammen, so dass wir wissen, wie der Graph $\Gamma_0(T^2) \setminus \mathcal{T}$ aussieht. Siehe Abbildung 3

1.6 Abbruchbedingung

Bisher haben wir gesehen, dass ab der ersten Stufe nur noch Knoten zusammen fallen können. Um die Graphen $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ komplett zu kennen, möchten wir noch wissen, bis zu welcher Stufe Knoten noch zusammen fallen können. Im Fall von Kongruenzuntergruppen können wir ein einfaches Kriterium angeben:

Satz 1.30 *Sei Γ_u eine der Gruppen $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$, sei $n = \deg(N)$. Dann fallen spätestens ab der Stufe n keine Knoten mehr zusammen.*

Für diese Gruppen gibt es später noch eine sehr genaue Analyse der Abbruchbedingung. Siehe Abschnitt 2.4.

BEWEIS: Sei $m \geq n$. Damit in der m -ten Stufe zwei Knoten $s_i(\Lambda_m)$ und $s_j(\Lambda_m)$ im Quotientengraphen zusammen fallen, muss es ein $\gamma \in G_m$ geben mit $s_i^{-1}\gamma s_j \in \Gamma_u$. Sei also $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & M \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \in G_m$ mit $s_i^{-1}\gamma s_j \in \Gamma_u$. Dann sind $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}_q^*$ und $M \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\deg(M) \leq m$. Nach Division mit Rest können wir M schreiben als $M = Q \cdot N + M'$ mit $Q, M' \in \mathbb{F}_q[T], r := \deg(M') < n$. Es ist dann $s_i^{-1}\gamma s_j = s_i^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & QN + M' \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} s_j \equiv s_i^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & M' \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} s_j \pmod{N}$. Da die Kongruenzuntergruppen über Kongruenzbedingungen modulo N definiert waren, ist also $s_i^{-1}\gamma s_j \in \Gamma_u$ genau dann, wenn $s_i^{-1}\gamma' s_j \in \Gamma_u$ ist, mit $\gamma' := \begin{pmatrix} \alpha_1 & M' \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. Da $\gamma' \in G_r$ ist, sind die Knoten $s_i(\Lambda_r)$ und $s_j(\Lambda_r)$ also im Quotientengraphen bereits zusammen gefallen. ■

Um die Graphen $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ zu berechnen, müssen wir also nur $\deg(N) - 1$ Stufen weit nach außen rechnen. Die Knoten, die bis dahin nicht zusammen gefallen sind, entsprechen den Spitzen des Quotientengraphen.

1.7 Algorithmische Aspekte, Laufzeiten

Wir haben gesehen, dass die erste Aufgabe im Algorithmus zum Berechnen von $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ darin besteht, ein Vertretersystem von $\Gamma_u \setminus \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ zu bestimmen. Die Laufzeit des Algorithmus wird von der Ordnung des Vertretersystems abhängen. Wir erklären zunächst für die drei Fälle $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ und $\Gamma(N)$, wie wir das Vertretersystem im Computer repräsentieren und abspeichern. Danach schätzen wir die Laufzeit des Algorithmus grob nach oben ab.

1.7.1 $\Gamma_0(N)$

Um ein Vertretersystem abzuspeichern, besteht hier die Aufgabe, den $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ zu bestimmen. Dies ist eine nicht-triviale Aufgabe. Wir haben bereits im Beweis von Lemma 1.22 benutzt, dass zwei Paare $(u_0, v_0), (u_1, v_1)$ genau dann das gleiche Element in $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ definieren, falls $u_0 v_1 \equiv u_1 v_0 \pmod{N}$ gilt. Eine Möglichkeit, $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ zu erzeugen, wäre dann, die Paare $(1, a)$ mit $a \in \mathbb{F}_q[T], \deg(a) < \deg(N)$ und die Paare (d, a) mit $d \mid N, d$ normiert, und $\deg(a) < \deg(N)$ mit $\text{ggT}(a, d, N) = 1$ in eine Liste abzuspeichern. Wir müssten dann bei jedem neuen Element überprüfen, ob es äquivalent zu einem der Elemente ist, die bereits in der Liste sind.

Der Nachteil dieser Methode ist allerdings, dass es zu einem beliebigen Element $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ aufwendig ist, das entsprechende äquivalente Element aus der abgespeicherten Liste zu finden, da man (u, v) dann mit jedem Element aus der Liste vergleichen muss. Man bräuchte also $\mathcal{O}(\#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]))$ viele Schritte für diese Aufgabe.

Stattdessen benutzen wir eine kleine Verfeinerung dieses Algorithmus, ähnlich wie ihn W. Stein in [St, 6.6.1] für $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N)$ vorschlägt. Die Idee ist, dass wir zunächst überlegen, wie man zu einem gegebenen Paar $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ einen äquivalenten Repräsentanten (u', v') findet, der in einem gewissen Sinn kanonisch ist. Wenn man dies hat, kann man $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ erzeugen, indem man genügend Paare in eine Liste aufnimmt, und durch die dazu äquivalenten kanonischen Repräsentanten ersetzt. Zu einem Paar $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ setzen wir dazu $u' := \text{ggT}(u, N)$ und suchen das lexikographisch kleinste Element $v' \in \mathbb{F}_q[T]$, so dass $(u, v) \sim (u', v')$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ gilt. Danach kann man die Liste sortieren und doppelte Paare rauswerfen.

Algorithmus 1.31

EINGABE: $u, v, \in \mathbb{F}_q[T], N \in \mathbb{F}_q[T], \deg(N) \geq 1$.

AUSGABE: $[(0, 0); 0]$ falls $(u, v) \notin \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ ist. Ansonsten $[(u_0, v_0); s]$ mit $\text{ggT}(s, N) = 1$ und $(u, v) \equiv (su_0, sv_0) \pmod{N}$. Das Paar (u_0, v_0) soll dabei nur von der Klasse von $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ abhängen. Für alle s' mit $\text{ggT}(s', N) = 1$ liefert die Eingabe $[(s'u, s'v); N]$ ebenfalls (u_0, v_0) als Ergebniss.

NOTATION: Zu $a \in \mathbb{F}_q[T]$ bezeichne $a \% N$ das eindeutige Polynom $a' \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $a \equiv a' \pmod{N}$ und $\deg(a') < \deg(N)$.

ALGORITHMUS:

1. Reduziere u und v modulo N :

$$\begin{aligned} u &:= u \% N \\ v &:= v \% N \end{aligned}$$

2. Falls $u = 0$ ist: Falls $\text{ggT}(v, N) = 1$ ist, gib $[(0, 1), v]$ aus. Ansonsten gib $[(0, 0), 0]$ aus.
3. Berechne $g = \text{gcd}(u, N)$ und $s, t \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $g = su + tN$ und reduziere $s \pmod{N}$:

$$\begin{aligned} g, s, t &:= \text{Xgcd}(u, N) \\ s &:= s \% N \end{aligned}$$

4. Falls $\text{ggT}(u, v, N) = \text{ggT}(g, v) > 1$ ist, gib $[(0, 0); 0]$ aus.
5. Da $g = su + tN$ ist, können wir s als eine Art Pseudo-Inverse zu $u \pmod{N}$ auffassen. Da $g \mid u$, können wir $s \pmod{\frac{N}{g}}$ abändern, ohne etwas an $su \pmod{N}$ zu ändern. Wir können daher ein s wählen mit $\text{ggT}(s, N) = 1$:

$$\begin{aligned} \text{if } g \neq 1 \{ \\ \quad d &:= N/g \\ \quad \text{while } \text{ggT}(s, N) \neq 1 \{ \\ \quad \quad s &:= s + d \\ \quad \quad s &:= s \% N \\ \quad \} \\ \} \end{aligned}$$

}

6. Da $\text{ggT}(s, N) = 1$ ist, können wir (u, v) mit s multiplizieren, und erhalten dann das in $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ äquivalente Element (g, sv) :

```

u := g
v := s * v
v := v % N

```

7. Da g als grösster gemeinsamer Teiler nur bis auf Einheiten in $(\mathbb{F}_q[T])^* = \mathbb{F}_q^*$ eindeutig ist, können wir noch g normieren. Sei $g = a_n T^n + \dots$. Multipliziere (g, v) mit $a := a_n^{-1}$:

```

g := a * g
v := a * v

```

8. Der entscheidende Schritt im Algorithmus ist jetzt, dass wir ein zu (g, v) äquivalentes Paar (g, v') finden, dass v' bezüglich der lexikographischen Ordnung minimiert. Dieses Paar ist dann eindeutig. Dazu gehen wir wie folgt vor: Falls ein $1 \neq t \in \mathbb{F}_q[T]$ existiert mit $\text{ggT}(t, N) = 1$ und $tg \equiv g \pmod{N}$, so gilt $(t-1)g \equiv 0 \pmod{N}$, also $t-1 = kN/g$ für ein $k \in \mathbb{F}_q[T], k \neq 0, \deg(k) < \deg(g)$. Es reicht also für alle $0 \neq k \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\deg(k) < \deg(g)$ die Paare $(g, v + kvN/g)$ mit $\text{ggT}(1+kN/g, N) = 1$ zu berechnen, und dasjenige rauszupicken, welches $v + kvN/g$ minimiert.

```

min_v := v
min_t := 1
if g != 1 {
  for all k in F_q[T], deg(k) < deg(g) {
    temp_v := v + k v N/g
    temp_v := temp_v % N;
    if temp_v < min_v and ggT(1 + k N/g, N) = 1 {
      min_v := temp_v
      min_t := 1 + k N/g
    }
  }
}
s := s * min_t
s := s % N

```

9. Schlussendlich ist noch zu beachten, dass wir ein s berechnet haben mit $(su, sv) = (u_0, v_0)$. Also müssen wir s noch invertieren:

```

s := inverse(s, N)
return [(u, min_v), s]

```

Mit Hilfe von Algorithmus 1.31 ist es nun einfach, ein vollständiges und in obigem Sinn sortiertes Repräsentantensystem von $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ zu erzeugen. Dazu schreiben wir einfach die kanonischen Vertreter von den Paaren $(0, 1)$ und (g, v) für alle $g \mid N$ und alle $v \in \mathbb{F}_q[T], \deg(v) < N$ in eine Liste. Diese Liste sortieren wir anschließend und entfernen in einem Durchgang doppelte Einträge.

Einen kanonischen Vertreter $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ können wir direkt nach $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ liften. Dazu beachten wir, dass u ein Teiler von N ist und $\mathrm{ggT}(u, v, N) = 1$ gilt, folglich sind u und v teilerfremd. Wir schreiben dann $1 = xu + yv$ und erhalten die Matrix $\begin{pmatrix} y & -x \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ als Lift von (u, v) .

Bemerkung 1.32 Der Chinesischen Restsatz liefert eine Zerlegung

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N) \cong \prod_{p|N} \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/p^{\nu_p})$$

Damit kann man die Aufgabe noch einmal vereinfachen, da es relativ leicht ist, die Elemente von $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/p^{\nu_p})$ auf eine kanonische Art aufzuzählen. Dies wurde allerdings nicht implementiert, da die eingesparte Rechenzeit unwesentlich ist.

Mit Hilfe von Algorithmus 1.31 und dem konstruktiv aufgeschriebenen Beweis 1.22 ist damit auch klar, wie wir zu einem gegebenen Element $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ ein $\Gamma_0(N)$ -äquivalentes γ' aus unserem Vertretersystem und eine Matrix $t \in \Gamma_0(N)$ finden mit $\gamma = t\gamma'$.

1.7.2 $\Gamma(N)$

Wir haben in Satz 1.24 gezeigt, dass ein Repräsentantensystem von $\Gamma(N) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ aus den Matrizen in

$$\begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$$

besteht. Die Berechnung des Repräsentantensystems wird nun kurz erklärt. Der trickreiche Teil besteht darin, zu einer Matrix $\bar{\gamma} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ eine Matrix $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ zu konstruieren mit $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ bezüglich der Reduktion. Dies ist möglich, da die Abbildung $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ surjektiv ist. Dafür gebe ich an dieser Stelle einen kurzen konstruktiven Beweis an, aus dem unmittelbar klar wird, wie man die Matrizen nach $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ liften kann.

Satz 1.33 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]) &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a \bmod N & b \bmod N \\ c \bmod N & d \bmod N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist surjektiv.

BEWEIS: Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ gegeben. Wir haben also Polynome $a, b, c, d \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$. Unser Ziel ist es, Polynome $k, l, s, t \in \mathbb{F}_q[T]$ so dass mit $a' := a + kN, b' := b + lN, c' := c + sN, d' := d + tN$ gilt $a'd' - b'c' = 1$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$$

im Urbild von γ unter ρ .

Dazu betrachten wir erst die untere Zeile. Da $\mathrm{ggT}(c, d) \in (\mathbb{F}_q[T]/N)^*$ ist, gilt

$\text{ggT}(c, d, N) = 1$. Wir wollen s, t in $\mathbb{F}_q[T]$ finden, so dass für $c' := c + sN$ und $d' := d + tN$ gilt $\text{ggT}(c', d') = 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls $c \neq 0$ ist, dann setzen wir $s = 0$ und mit $g := \text{ggT}(c, d)$ wählen wir mit dem Chinesischen Restsatz ein $t \in \mathbb{F}_q[T]$, dass die Kongruenzen

$$\begin{aligned} t &\equiv 1 \pmod{p} && \text{für } p \mid g \\ t &\equiv 0 \pmod{p} && \text{für } p \nmid g, p \mid c \end{aligned}$$

löst. Man sieht dann unmittelbar, dass $\text{ggT}(c', d') = 1$ gilt. Falls $c = 0$ ist, so folgt aus $\text{ggT}(c, d, N) = 1$, dass $d \neq 0$ gilt. Mit den Rollen von c und d vertauscht finden wir dann auf die gleiche Art wieder s und t mit $\text{ggT}(c + sN, d + tN) = 1$. In beiden Fällen können wir die untere Zeile liften.

Für die obere Zeile beachten wir, dass $ad - bc = 1 + rN$ ist für ein $r \in \mathbb{F}_q[T]$, da $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ ist. Da $\text{ggT}(c', d') = 1$ ist, finden wir mit dem Euklidischen Algorithmus Polynome $f, g \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $1 = fc' + gd'$. Wir setzen dann $k := -(r + at - bs)g$ und $l := (r + at - bs)f$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} a'd' - b'c' &= (a + kN)d' - (b + lN)c' = ad' + kNd' - bc' - lNc' = \\ ad + atN - bc - bsN + kNd' - lNc' &= ad - bc + atN - bsN + kNd' - lNc' = \\ 1 + (r + at - bs + kd' - lc')N &= 1 + (r + at - bs - (r + at - bs)(gd' + fc'))N = \\ &= 1 + (r + at - bs - (r + at - bs)1)N = 1 \end{aligned}$$

Also ist die Matrix $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ein Lift von γ nach $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. ■

Der Beweis war konstruktiv. Damit ist dann klar, wie wir das Repräsentantensystem von $\Gamma(N) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ berechnen.

Um nun zu einer gegebenen Matrix $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ eine $\Gamma(N)$ -äquivalente Matrix aus unserem Vertretersystem zu finden, sei $r := \begin{pmatrix} \det(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\tilde{\gamma} := r^{-1} \cdot \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Sei $\bar{\gamma} := \rho(\tilde{\gamma})$ die Matrix, die wir erhalten, indem wir die Einträge modulo N reduzieren. $\bar{\gamma}$ ist dann in $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$. Wir liften $\bar{\gamma}$ wie im Beweis von Satz 1.33 zu einer Matrix $\kappa \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Dann ist $r \cdot \kappa$ die gesuchte $\Gamma(N)$ -äquivalente Matrix zu γ aus unserem abgespeicherten Vertretersystem.

Bemerkung 1.34 Im Beweis von Satz 1.33 bestand die Aufgabe darin, zu einem Paar (c, d) mit $\text{ggT}(c, d, N) = 1$ und $c \neq 0$ ein $t \in \mathbb{F}_q[T]$ zu finden, so dass $\text{ggT}(c, d + tN) = 1$ gilt. Dieses t haben wir mit dem Chinesischen Restsatz konstruiert. Wenn es aus Komplexitätsgründen das Ziel ist, ein t mit möglichst kleinem Grad zu wählen, so ist es geschickter, dieses zufällig zu wählen. Eine Aussage über ‘Primzahlen in Arithmetischer Progression’ suggeriert dann, dass nur wenige t von kleinem Grad benötigt werden. Dabei sollten Polynome bis zum Grad $O(\log_q(\text{Grad } N))$ ausreichen. Einen Beweis dafür haben wir nicht. In der Praxis funktioniert dieses Verfahren allerdings gut, meist sogar mit $t = 1$.

1.7.3 $\Gamma_1(N)$

In Satz 1.25 haben wir gesehen, dass ein Repräsentantensystem von $\Gamma_1(N) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ isomorph ist zu

$$\begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \{(c, d) \in (\mathbb{F}_q[T]/N)^2 \mid \mathrm{ggT}(c, d) = 1\}$$

Zunächst überlegen wir uns wieder, wie wir ein Paar $(c, d) \in (\mathbb{F}_q[T]/N)^2$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ zu einer Matrix in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ liften können.

Dazu sei (c, d) ein solches Paar. Da $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ in $\mathbb{F}_q[T]/N$ ist, ist $\mathrm{ggT}(c, d, N) = 1$. Wie im Beweis von Satz 1.33 finden wir auf kanonische Weise Polynome s, t in $\mathbb{F}_q[T]$, so dass für $c' := c + sN$ und $d' := d + tN$ gilt $\mathrm{ggT}(c', d') = 1$. Zu einem solchen Paar (c', d') finden wir dann Polynome $x, y \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $1 = xc' + yd'$. Also ist die Matrix $\begin{pmatrix} y & -x \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$.

Um zu einer gegebenen Matrix $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ eine $\Gamma_1(N)$ -äquivalente Matrix aus dem abgespeicherten Vertretersystem zu finden, sei wieder $r := \begin{pmatrix} \det(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Von der Matrix $\tilde{\gamma} := r^{-1} \cdot \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ nehmen wir die untere Zeile, reduzieren die Einträge modulo N und erhalten dann ein Tupel $(c, d) \in (\mathbb{F}_q[T]/N)^2$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Dieses liften wir auf eben beschriebene Weise zu einem Paar $(c', d') \in (\mathbb{F}_q[T])^2$ mit $\mathrm{ggT}(c', d') = 1$ und ergänzen dieses Paar zu einer Matrix $\kappa \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Die Matrix $r \cdot \kappa$ ist dann die gesuchte $\Gamma_1(N)$ -äquivalente Matrix zu γ aus dem abgespeicherten Vertretersystem.

1.7.4 Laufzeiten

Sei Γ_u eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N mit $n := \deg(N)$ und sei $m := [\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma_u]$ die Zahl der Elemente im Vertretersystem. Um die Knoten der Stufe 0 zu berechnen, brauchen wir nach Satz 1.26 weniger als $\#\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \cdot m^2 = (q^2 - 1)(q - 1)q \cdot m^2$ viele Schritte. Um die Kanten zwischen 0 und 1 zu berechnen, brauchen wir weniger als $(q - 1)^2 q \cdot m^2$ viele Schritte. Und um die Knoten und Kanten einer Stufe $1 \leq i < N$ zu berechnen brauchen wir weniger als $(q - 1)^2 q^{i+1} \cdot m^2$ viele Schritte. In der Praxis brauchen wir sogar deutlich weniger Schritte. Schließlich wissen wir, dass Vertreter, die in einer Stufe $i \geq 1$ zusammengefallen sind, auch in den Stufen $k \geq i$ zusammenfallen werden. Diese Vertreter können wir dann also aus dem Vertretersystem rausnehmen. Weiterhin brauchen wir nicht in jeder Stufe alle m Vertreter paarweise miteinander vergleichen. Sobald wir wissen, dass zwei Vertreter zusammenfallen, brauchen wir die restlichen Vertreter nur noch mit einem der beiden vergleichen. Eine geschickte Implementierung spart hier also noch einmal deutlich Rechenzeit.

Für $\Gamma_0(N)$ ist $m \leq q^n \cdot \tau(N)$ mit $\tau(N) := \#\{M \in \mathbb{F}_q[T] \mid M \mid N\}$. Für $\Gamma_1(N)$ ist $m \simeq (q - 1) \cdot q^{2n}$ und für $\Gamma(N)$ ist $m \simeq (q - 1)q^{3n}$. Bei den Gruppen $\Gamma(N)$ ist daher schon für kleine q schnell eine Komplexität erreicht, die nicht mehr zu beherrschen ist. Hier können wir daher nur kleine Beispiele berechnen.

Für kleine q haben wir die Gruppen $\Gamma_1(N)$ noch etwas besser unter Kontrolle. Allerdings wächst auch hier mit wachsendem n die Komplexität sehr schnell an. Zum Beispiel für $q = 4$ und $N = T^3 + T$ beträgt in der vorliegenden Implementierung die Rechenzeit auf einem Intel Core Duo T2300 mit 1,66 GHz ungefähr 176 Minuten.

Die Gruppen $\Gamma_0(N)$ haben wir noch am besten unter Kontrolle, hier wächst m in Abhängigkeit von n nicht ganz so rasant. Für $q = 2$ können wir daher Beispiele bis

zum Grad $n = 10$ berechnen. Auch für etwas grössere q haben wir hier noch einige Beispiele unter Kontrolle.

1.8 Motivation 1

Die Graphen $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ verraten einem wichtige arithmetische Eigenschaften der Gruppen Γ_u . Es ist zum Beispiel der Rang der grössten abelschen Faktorgruppe von Γ_u gleich dem \mathbb{Z} -Rang der Homologie des Graphen $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$. Genau gilt:

Satz 1.35 *Es existiert ein Isomorphismus $\Gamma_u^{ab}/torsion \cong H_1(\Gamma_u \backslash \mathcal{T}, \mathbb{Z})$*

BEWEIS: Nach [Se, I.5, Cor. 1] gilt $\Gamma_u/R \cong \pi_1(\Gamma_u \backslash \mathcal{T})$, wobei R die Gruppe $\langle G_\Lambda \mid \Lambda \in X(\mathcal{T}) \rangle$ ist. Ein Matrix $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ lässt genau dann einen Knoten fix, wenn γ endliche Ordnung hat. Seien $\Gamma_{u,f}$ die Elemente in Γ_u von endlicher Ordnung. Es ist also $(\Gamma_u/\Gamma_{u,f})^{ab} \cong \pi_1(\Gamma_u \backslash \mathcal{T})^{ab} \cong H_1(\Gamma_u \backslash \mathcal{T}, \mathbb{Z})$. Außerdem gilt $\Gamma_u^{ab}/torsion \cong (\Gamma_u/\Gamma_{u,f})^{ab}$. ■

2 Harmonische Kozykeln

In diesem Kapitel definieren wir den Vektorraum der harmonischen Kozykel und liefern einen Algorithmus zum Bestimmen einer Basis dieses Vektorraums. Dieses Kapitel beruht dabei auf der Arbeit [Te1] von J.T. Teitelbaum. Einige Resultate aus Abschnitt 2.3 finden sich auch wieder in [Se].

2.1 Kozykeln

Wir definieren harmonische Kozykeln als Funktionen auf den gerichteten Kanten des Bruhat-Tits-Baums. Dazu bezeichnen wir für $e \in Y(\mathcal{T})$ mit e^* die Kante e mit umgekehrter Orientierung. Für einen Knoten $v \in X(\mathcal{T})$ schreiben wir $e \mapsto v$ falls v der Endknoten von e ist. Sei $V(k)$ der Vektorraum der homogenen Polynome in 2 Variablen X und Y vom Grad $k - 1$ über K_∞ . Wir lassen $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ auf $V(k)$ operieren durch

$$\gamma \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K_\infty)$. Sei $V(-k) = \mathrm{Hom}(V(k), K_\infty)$. Wir lassen $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$ auf $V(-k)$ operieren durch $g\varphi(m) := \varphi(g^{-1}m)$.

Definition 2.1 Sei M ein Vektorraum mit einer Operation der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$, Γ_u eine der Kongruenzuntergruppen aus Definition 1.21.

- (a) Eine Funktion $c : Y(\mathcal{T}) \rightarrow M$ heisst M -wertiger harmonischer Kozykel, falls
 - (i) Für alle Knoten $v \in X(\mathcal{T})$ gilt $\sum_{e \mapsto v} c(e) = 0$.
 - (ii) $c(e^*) = -c(e)$ für alle $e \in Y(\mathcal{T})$.
- (b) Eine Funktion $c : Y(\mathcal{T}) \rightarrow M$ heißt Γ_u -equivariant, falls für alle $\gamma \in \Gamma_u$ gilt $c(\gamma e) = \gamma c(e)$.
- (c) Sei $C_{\mathrm{har}}(\Gamma_u, k)$ die Menge der Γ_u -equivarianten harmonischen Kozykel mit Werten in $V(1 - k) \otimes (\det)^{2-k}$.

Bemerkung 2.2 $C_{\mathrm{har}}(\Gamma_u, k)$ ist mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K_∞ -Vektorraum.

Definition 2.3 Ein harmonischer Kozykel c heißt kusal bezüglich einer Kongruenzuntergruppe Γ_u , falls es einen endlichen Teilgraphen $V \subset \Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ gibt mit $c(e) = 0$ für alle $e \notin Y(\pi^{-1}(V))$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Γ_u -equivariante harmonische Kozykel mit Werten in einem Vektorraum der Charakteristik p für Kongruenzuntergruppen Γ_u kusal sind. Hierzu brauchen wir noch ein Lemma über die Stabilisatoren von den Knoten in der Standardgerade $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \dots$.

Lemma 2.4 Sei Γ_u eine Kongruenzuntergruppe, sei $\Lambda_i = [\langle \mathcal{O}_\infty \oplus \pi^n \mathcal{O}_\infty \rangle]$ ein Knoten aus der Standardgerade. Sei $U_i = \mathrm{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)$. Dann gilt:

- (a) Für i hinreichend groß ist $\#U_i/U_{i-1} = q$.

(b) In diesem Fall fixiert U_i/U_{i-1} die Kante $(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ und operiert transitiv auf den anderen q Kanten, die Λ_i als Knoten haben.

BEWEIS: (a) Für $\Gamma_u = \Gamma(1) = \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ haben wir in Satz 1.17(b) die Stabilisatoren der Knoten Λ_i explizit ausgerechnet als $\text{Stab}_{\Gamma(1)}(\Lambda_i) = G_i = \left\{ \begin{pmatrix} a & f \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_q^*, f \in \mathbb{F}_q[T], \deg(f) \leq i \right\}$ und es gilt $\#G_i/G_{i-1} = q$.

Sei nun Γ_u eine beliebige Kongruenzuntergruppe. Nach Definition existiert dann ein $n \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $\Gamma(n) \subseteq \Gamma_u$. Es gilt $U_i = \text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i) = G_i \cap \Gamma_u$. Sei $U'_i := \text{Stab}_{\Gamma(n)}(\Lambda_i)$.

Für $i > \deg(n)$ gilt dann $U'_i = G_i \cap \Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & g \cdot n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(g) \leq i - \deg(n) \right\}$. Also ist $\#U'_i = q^{i - \deg(n)}$ und $\#U'_i/U'_{i-1} = q^{i - \deg(n)} / q^{i-1 - \deg(n)} = q$. Da $G_{i-1} \cdot U_i \subseteq G_i$ ist, gilt $G_i/G_{i-1} \supseteq G_{i-1} \cdot U_i/G_{i-1} = U_i/U_i \cap G_{i-1} = U_i/U_{i-1}$. Genauso gilt $U'_i/U'_{i-1} \subseteq U_i/U_{i-1} \subseteq G_i/G_{i-1}$ und für $i > \deg(n) + 1$ bekommen wir aufgrund der Kardinalitäten jeweils Gleichheit.

(b) In Satz 1.17(d) haben wir bereits gezeigt, dass G_i die Kante $(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ fixiert und dass $\#G_i \cdot (\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = q$ ist. Da $G_{i-1} \cdot (\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = (\Lambda_{i-1}, \Lambda_i)$ ist, ist also auch $U_i/U_{i-1} \cdot (\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = G_i/G_{i-1}(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = q$. Das heißt U_i/U_{i-1} operiert transitiv auf den Kanten an Λ_i von $(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ verschieden. ■

Satz 2.5 Sei $p = \text{Char}(K_\infty)$ und M ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer Operation der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ über einem Körper der Charakteristik p und sei Γ_u eine Kongruenzuntergruppe. Dann ist jeder M -wertige Γ_u -equivariante harmonische Kozykel kusal.

BEWEIS: Sei $w := e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$ eine Folge von Kanten in \mathcal{T} , die eine Spitze von Γ_u repräsentieren, die also unter der Projektion $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ auf ein Ende des Graphen $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ abgebildet werden. Sei c ein M -wertiger Γ_u -equivarianter harmonischer Kozykel. Zu zeigen ist, dass $c(e_i) = 0$ ist für i gross genug.

Wir betrachten zuerst die Spitze, die zu der Folge von Knoten $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ gehört, also ist $e_i = (\Lambda_{i-1}, \Lambda_i)$.

Sei $U = \text{Stab}_{\Gamma_u}(w)$ und $U_i := \text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)$. Es gilt also $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = U$. Sei $M_i := \{m \in M \mid \gamma m = m \text{ für alle } \gamma \in U_i\}$. Aufgrund der Γ_u -Equivarianz von c gilt dann $c(e_i) \in M_i$. Es ist $M_{i+1} \subseteq M_i$, die M_i bilden also eine absteigende Folge von Untervektorräumen in einem endlichdimensionalen Vektorraum, es gibt also ein N , so dass für alle $i \geq N$ gilt $M_{i+1} = M_i$. Sei j beliebig größer als $\max(N, \deg(n) + 1)$ (mit $\Gamma_u \supseteq \Gamma(n)$). Sei v_j der Knoten, der die Kanten e_{j-1} und e_j verbindet. Also ist $U_{j-1} \subseteq U_j \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_u}(v_j)$ und nach Lemma 2.4 ist $\#U_j/U_{j-1} = q$ und U_j/U_{j-1} operiert transitiv auf den q Kanten ungleich e_{j-1} , die an v_j angrenzen. Sei $\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\}$ ein Repräsentantensystem von U_j/U_{j-1} . Da c harmonisch ist gilt dann

$$\begin{aligned} c(e_j) &= \sum_{i=1}^q c(\gamma_i e_{j-1}) \Big|_{c \text{ } \Gamma_u\text{-equivariant}} = \sum_{i=1}^q \gamma_i c(e_{j-1}) \\ &= \sum_{e_{j-1} \in M_{j-1} = M_j}^q c(e_{j-1}) = qc(e_{j-1}) = 0 \end{aligned}$$

Also ist $c(e_j) = 0$ für alle $j > N$.

Sei nun $\tilde{w} := \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots$ eine Folge von Kanten in \mathcal{T} , die eine beliebige Spitze in Γ_u repräsentieren. Da $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ transitiv auf den Spitzen operiert, gibt es ein $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ mit $\gamma w = \tilde{w}$, also existiert ein \tilde{N} mit $\gamma e_i = \tilde{e}_i$ für $i > \tilde{N}$. Wir definieren nun $\tilde{c} : \mathcal{T} \rightarrow M : \tilde{c}(\sigma) := \gamma^{-1}c(\gamma \cdot \sigma)$.

\tilde{c} ist dann ein harmonischer Kozykel für die Kongruenzuntergruppe $\gamma^{-1}\Gamma_u\gamma$: Die Harmonizität folgt unmittelbar aus der Harmonizität von c . Für die $\gamma^{-1}\Gamma_u\gamma$ -Equivarianz: Sei $\alpha \in \gamma^{-1}\Gamma_u\gamma$, also $\alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma$ mit $\beta \in \Gamma_u$. Dann gilt:

$$\tilde{c}(\alpha\sigma) = \tilde{c}(\gamma^{-1}\beta\gamma\sigma) = \gamma^{-1}c(\gamma\gamma^{-1}\beta\gamma\sigma) = \gamma^{-1}\beta c(\gamma\sigma) = \gamma^{-1}\beta\gamma\gamma^{-1}c(\gamma\sigma) = \alpha\tilde{c}(\sigma)$$

Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{c}(e_j) = 0$ für $j > N$. Also $0 = \tilde{c}(e_j) = \gamma^{-1}c(\gamma e_j)$. Für $j > \max(N, \tilde{N})$ gilt dann $\gamma^{-1}c(\tilde{e}_j) = 0$, also $c(\tilde{e}_j) = 0$.

Da nach Bemerkung 1.27 $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ ein endlicher Teilgraph mit endlich vielen Spitzen ist, und wir gezeigt haben, dass c auf allen Spitzen verschwindet, folgt die Behauptung.

■

Bemerkung 2.6 Der Beweis von Satz 2.5 macht keine Verwendung des expliziten Kozykels. Wir haben also gezeigt, dass ein endlicher Bereich von $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ existiert, so dass für alle harmonischen Kozykel c gilt $c(e) = 0$ für alle $e \notin Y(\pi^{-1}(V))$. Insbesondere gilt $\dim C_{har}(\Gamma_u, k) < \infty$.

2.2 Stabile Knoten

Bevor wir zu einem Algorithmus zum Bestimmen der harmonischen Kozykel kommen, müssen wir erst die Struktur des Quotientengraphen $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ besser verstehen. Hierzu führen wir den Begriff „ Γ_u -stabil“ ein, und werden untersuchen, wie der Bereich des Quotientengraphen, der aus stabilen Knoten besteht, aussieht.

Definition 2.7 Sei Γ_u eine Kongruenzuntergruppe der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Ein Knoten $x \in X(\mathcal{T})$ (bzw. eine Kante $y \in Y(\mathcal{T})$) heißt Γ_u -stabil, falls $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x) = \{1\}$ (bzw. $\text{Stab}_{\Gamma_u}(y) = \{1\}$) ist.

Sei $\mathcal{T}_\infty := \mathcal{T}_{\infty, \Gamma_u}$ der Teilgraph von \mathcal{T} , der aus den Γ_u -instabilen Knoten und Kanten besteht und sei $S_0 = X(\mathcal{T}) - X(\mathcal{T}_\infty)$ bzw. $S_1 = Y(\mathcal{T}) - Y(\mathcal{T}_\infty)$.

Da die Stabilisatoren der Knoten bzw. Kanten in S_0 bzw. S_1 trivial sind, operiert Γ_u frei auf S_0 bzw. S_1 . Also sind die $\mathbb{Z}[\Gamma_u]$ -Moduln $L_0 = \mathbb{Z}[S_0]$ bzw. $L_1 = \mathbb{Z}[S_1]$ freie Moduln vom Rang $l_0 := \#(\Gamma_u \backslash S_0)$ bzw. $l_1 := \#(\Gamma_u \backslash S_1)$.

Satz 2.8 Die Zahlen l_0 bzw. l_1 sind endlich.

BEWEIS: Für l_0 ist zu zeigen, dass im Quotientengraph $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ nur endlich viele stabile Knoten sind. Nach Bemerkung 1.27 besteht der Graph $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ aus einem endlichen Graphen plus einer endlichen Anzahl von Spitzen. Für die Spitze, die durch die Standardgerade $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \dots$ repräsentiert wird, gibt es nach Lemma 2.4 ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i > N$ gilt $\frac{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_{i-1})} = q$, also auf jeden Fall $\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i) > \{1\}$.

Für eine beliebige Spitze $w = e_1, e_2, e_3, \dots$ finden wir wie im Beweis zu Satz 2.5 ein $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ mit $\gamma w = \tilde{w}$, also $e_i = \gamma\Lambda_i$ und $\gamma(e_i, e_{i+1}) = (\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ für alle $i > N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i) = \text{Stab}_{\Gamma_u}(\gamma\Lambda_i) = \gamma\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)\gamma^{-1}$, also sind die Stabilisatoren $\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)$ und $\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)$ ab einem $N \in \mathbb{N}$ gleichmächtig.

Insgesamt haben wir also nur endlich viele Knoten in $\Gamma_u \backslash S_0$.

Für l_1 geht der Beweis analog, da für die Standardgerade gilt $\text{Stab}_{\Gamma_u}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1})) = \Gamma_u \cap \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1})) = \Gamma_u \cap \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) \cap \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_{i+1}) = \Gamma_u \cap \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) = \text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)$ und für eine beliebige Spitze finden wir wieder ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i > N$ die Stabilisatoren $\text{Stab}_{\Gamma_u}((e_i, e_{i+1}))$ und $\text{Stab}_{\Gamma_u}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1}))$ gleichmächtig sind.

Wir haben also auch nur endlich viele Knoten in $\Gamma_u \backslash \mathcal{S}_1$. ■

Als erstes wollen wir bemerken, dass es für die Gruppen $\Gamma_0(N)$ über \mathbb{F}_q mit $q > 2$ keine stabilen Knoten und Kanten gibt. Für $q > 2$ und $q \neq 2^r$ ist zum Beispiel die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ in $\Gamma_0(N)$. Für jedes \mathcal{O}_∞ -Gitter von \mathcal{K}_∞^2 gilt aber, dass man durch Multiplikation

mit Skalaren in der selben Gitterklasse bleibt. Also ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x)$ für alle $x \in X(\mathcal{T})$. Für eine Kante $y \in Y(\mathcal{T})$ gilt $\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(y) = \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_1) \cap \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_2)$ für x_1 und x_2 die beiden an y angrenzenden Knoten, also gilt auch $A \in \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(y)$. Also sind alle Kanten und Knoten instabil.

Für $q = 2^r, r \geq 2$ funktioniert das selbe Argument mit der Matrix $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$, mit $\xi \in \mathbb{F}_q^*$ und $\xi \neq 1$.

Für $q = 2$ funktioniert dieses Argument natürlich nicht, da wir in diesem Fall keine nicht-trivialen Skalarmatrizen in der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ haben.

Die Struktur des stabilen Bereichs im Quotientengraphen in den übrigen Fällen, also für die Gruppen $\Gamma(N), \Gamma_1(N)$ und für $q = 2, \Gamma_0(N)$, werden wir im Abschnitt 2.4 genauer untersuchen.

Bemerkung 2.9 Sei $v \in X(\mathcal{T})$ ein Γ -stabiler Knoten. Dann sind die $q + 1$ Kanten $(v, v_1), \dots, (v, v_{q+1})$ in $Y(\mathcal{T})$, die v als einen Knoten haben, ebenfalls Γ -stabil.

BEWEIS: Es ist $\text{Stab}_\Gamma((v, v_i)) = \text{Stab}_\Gamma(v) \cap \text{Stab}_\Gamma(v_i) = \{1\} \cap \text{Stab}_\Gamma(v_i) = \{1\}$. ■

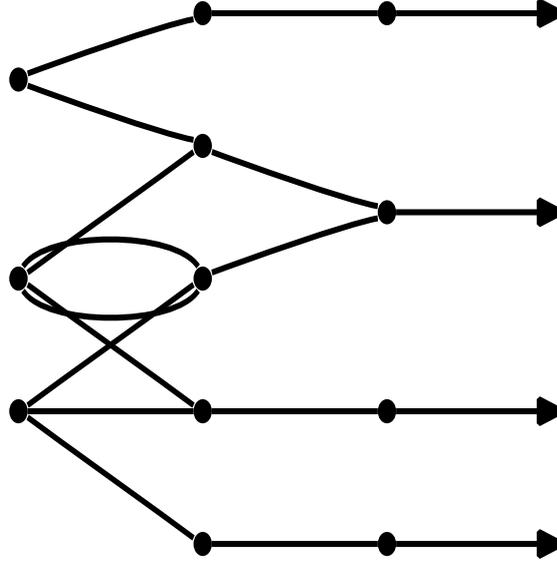
Der folgende Satz zeigt, dass für einen stabilen Knoten die Projektion $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{T}$ lokal eine Bijektion ist.

Satz 2.10 Sei Γ eine Untergruppe der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Dann gilt: Falls $v \in X(\mathcal{T})$ ein Γ -stabiler Knoten ist, hat $\bar{v} \in X(\Gamma \backslash \mathcal{T})$ im Quotientengraphen genau $q + 1$ angrenzende Kanten.

BEWEIS: Seien $(v, v_1), (v, v_2), \dots, (v, v_{q+1})$ die $q + 1$ Kanten an v . Angenommen, zwei Kanten $(v, v_i), (v, v_j)$ fallen in $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ zusammen. Dann existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(v, v_i) = \gamma(v, v_j)$. Da Γ nach Voraussetzung in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ war, erhält Γ nach Korollar 1.14 die Orientierung der Kanten. Also muss dann $\gamma v = v$ und $\gamma v_i = v_j$ gelten, also $\gamma \in \text{Stab}_\Gamma(v)$. Wegen der Γ -Stabilität von v folgt somit $\gamma = 1$ und $i = j$. ■

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht. Sei $q \neq 2$ und $\Gamma = \Gamma_0(N)$. Wir haben bereits gesehen, dass wir in diesem Fall wegen der Anwesenheit von Skalarmatrizen keine stabilen Knoten haben. Für die meisten N gibt es aber etliche Knoten in $X(\mathcal{T})$, die in $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{T}$ genau $q + 1$ Nachbarn haben. Abbildung 4 zum Beispiel zeigt den Graph $\Gamma_0(T * (T^2 + 1)) \backslash \mathcal{T}$ für $\mathbb{F}_q = 3$.

Auch wenn wir ausschließen, dass die Gruppe Γ nicht-triviale Skalarmatrizen besitzt, oder wenn wir voraussetzen, dass Γ für alle l mit $\text{ggT}(l, \text{Char}(K_\infty)) = 1$ l -torsionsfrei ist, gilt die Umkehrung nicht. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel:

Abbildung 4: Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T * (T^2 + 1)) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_3$

Beispiel 2.11 Sei $q = 2$ und

$$\Gamma := \{ \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \mid \exists a \in \mathbb{F}_q \text{ mit } \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{T^3} \}.$$

Lemma 2.17 zeigt, dass Γ als Untergruppe von $\Gamma_1(T^3)$ l -torsionsfrei ist für $\mathrm{gg}\Gamma(l, 2) = 1$. Wir betrachten die Umgebung des Knotens $\Lambda_2 = [\langle \mathcal{O}_\infty \oplus \mathcal{O}_\infty \pi_\infty^2 \rangle]$. Λ_2 entspricht also der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix}$. Die drei Nachbarknoten zu Λ_2 in \mathcal{T} entsprechen den Knoten Λ_1 und Λ_3 und einem weiteren Knoten gegeben durch die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \pi_\infty & 1 \\ 0 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix}$.

Für ein $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + T^3 n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ gilt dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha + T^3 n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pi_\infty^3 \alpha + \pi_\infty^3 T^3 n \\ 0 & \pi_\infty^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pi_\infty^3 \alpha + n \\ 0 & \pi_\infty^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha + T^3 n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pi_\infty \alpha + \pi_\infty T^3 n \\ 0 & \pi_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pi_\infty \alpha + T^2 n \\ 0 & \pi_\infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha + T^3 n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\infty & 1 \\ 0 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty & 1 + \alpha \pi_\infty^2 + \pi_\infty^2 T^3 n \\ 0 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty & 1 + \alpha \pi_\infty^2 + T n \\ 0 & \pi_\infty^2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten jeweils andere Basen für die selben Gitter, Γ kann also keines der 3 Gitter miteinander identifizieren. Wir haben also gezeigt, dass in $\Gamma \backslash \mathcal{T}$ das Gitter Λ_2 ebenfalls 3 Nachbarknoten hat.

Der Knoten Λ_2 ist allerdings instabil, denn der Stabilisator eines Knotens Λ_i aus der Standardbasis berechnet sich zu

$$\Gamma_i := \mathrm{Stab}_\Gamma(\Lambda_i) = \Gamma \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) = \Gamma \cap \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(f) \leq 1 \right\}$$

$$= \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{F}_q \right\} & \text{für } i \leq 2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha + T^3 n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{F}_q, n \in \mathbb{F}_q[T], \deg(n) \leq i - 3 \right\} & \text{für } i \geq 3 \end{cases}$$

Insgesamt sehen wir also, dass die Umkehrung von Satz 2.10 in diesem speziellen Fall nicht gilt.

2.3 Euler-Poincaré-Charakteristik

Die Euler-Poincaré-Charakteristik ist ein Hilfsmittel zur Überprüfung der Ergebnisse für die Quotientengraphen von l -torsionsfreien Untergruppen G der $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$. Satz 2.15 und Satz 2.23 liefern zwei verschiedene Verfahren, um die Euler-Poincaré-Charakteristik zu berechnen. Einmal über den Index von G in $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ und einmal durch Abzählen von stabilen Knoten und Kanten im Quotientengraph von $G \backslash \mathcal{T}$.

Definition 2.12 Sei Γ_u eine Kongruenzuntergruppe der $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ von endlichem Index. Dann definieren wir die Euler-Poincaré-Charakteristik von Γ_u als

$$\chi(\Gamma_u) := \sum_{x \in X(\Gamma_u \backslash \mathcal{T})} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \sum_{y \in Y(\Gamma_u \backslash \mathcal{T})} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)}$$

Als erstes überlegen wir, dass die beiden Summen konvergieren. Hierzu zeigen wir, dass es sich bei den Summen um geometrische Reihen handelt, zumindest sobald wir an einer Spitze des Quotientengraphen weit genug nach Unendlich gegangen sind.

Lemma 2.13 Für Γ_u eine Kongruenzuntergruppe der $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ sind die Reihen

$$\sum_{x \in X(\Gamma_u \backslash \mathcal{T})} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)}$$

und

$$\sum_{y \in Y(\Gamma_u \backslash \mathcal{T})} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)}$$

konvergent.

BEWEIS: Nach Bemerkung 1.27 besteht der Graph $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ aus einem endlichen zusammenhängenden Gebiet plus einer endlichen Anzahl von Spitzen. Es ist also für eine beliebige Spitze, die durch einen Pfad $w = e_0, e_1, e_2, e_3, \dots$ repräsentiert wird, zu zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)}$$

und

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}((e_i, e_{i+1}))}$$

konvergieren

Für die Spitze, die zu der Standardgerade $\tilde{w} = \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$ gehört, wissen wir nach Lemma 2.4, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i > N$ gilt

$$\frac{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_{i+1})}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)} = q$$

Also konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)}$$

Für $i > 1$ gilt $\text{Stab}_{\Gamma_u}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1})) = \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1})) \cap \Gamma_u = \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) \cap \Gamma_u = \text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)$. Also konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1}))}$$

Für eine beliebige Spitze $w = e_1, e_2, e_3, \dots$ finden wir wie im Beweis zu Satz 2.5 ein $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ mit $\gamma w = \tilde{w}$, also $e_i = \gamma \Lambda_i$ und $\gamma(e_i, e_{i+1}) = (\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ für alle $i > N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i) = \text{Stab}_{\Gamma_u}(\gamma \Lambda_i) = \gamma \text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i) \gamma^{-1}$, also sind die Stabilisatoren $\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)$ und $\text{Stab}_{\Gamma_u}(\Lambda_i)$ ab einem $N \in \mathbb{N}$ gleichmächtig und also auch die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)}$$

konvergent.

Analog gilt $\#\text{Stab}_{\Gamma_u}((e_i, e_{i+1})) = \#\text{Stab}_{\Gamma_u}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1}))$ ab einem $N \in \mathbb{N}$, und also konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1}))}$$

■

Die Euler-Poincaré-Charakteristik von $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ können wir leicht direkt berechnen.

Satz 2.14 $\chi(\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])) = -\frac{1}{(q^2-1)(q-1)}$

BEWEIS: Nach Satz 1.19 gilt $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \setminus \mathcal{T} = \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow \dots$. Nach Satz 1.17 ist $\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}((\Lambda_i, \Lambda_{i+1})) = \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i)$ für $i \geq 1$. Also heben sich bis auf den Anteil zwischen 0 und 1 sämtliche Summanden gegeneinander auf.

Ebenfalls nach Satz 1.17 ist

$$\frac{1}{\#\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_0)} = \frac{1}{\#\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)} = \frac{1}{(q^2-1)(q^2-q)}$$

und

$$\frac{1}{\#\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}((\Lambda_0, \Lambda_1))} = \frac{1}{(q-1)^2 q}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \chi(\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])) &= \frac{1}{(q^2-1)(q^2-q)} - \frac{1}{(q-1)^2 q} = \frac{q-1}{(q^2-1)(q-1)^2 q} - \frac{q^2-1}{(q^2-1)(q-1)^2 q} \\ &= \frac{q-1-q^2+1}{(q^2-1)(q-1)^2 q} = -\frac{q(q-1)}{(q^2-1)(q-1)^2 q} = -\frac{1}{(q^2-1)(q-1)} \end{aligned}$$

■

Der folgende Satz liefert ein sehr nützliches Hilfsmittel, um die Euler-Poincaré-Charakteristik einer Untergruppe der $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ zu berechnen.

Satz 2.15 *Sei $G' \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist $\chi(G') = \chi(G) \cdot (G : G')$.*

Der Graph $G \setminus \mathcal{T}$ wird von $G' \setminus \mathcal{T}$ überlagert. Für einen Knoten bzw. eine Kante $[e]$ von $G \setminus \mathcal{T}$ bezeichne $\{[e'] \mapsto [e]\}$ die Menge der Knoten bzw. Kanten in $G' \setminus \mathcal{T}$, die bezüglich der Überlagerung nach $[e]$ projiziert werden. Der Beweis des Satzes erinnert an den Satz von Hurwitz für Überlagerungen von kompakten Riemannschen Flächen. Bevor wir ihn beweisen können, brauchen wir noch ein Lemma. Genau wie beim Satz von Hurwitz werden wir das Verhalten der Stabilisatoren in der Überlagerung des Quotientengraphen $G \setminus \mathcal{T}$ lokal an einem Knoten beziehungsweise einer Kante untersuchen.

Lemma 2.16 *Sei $G' \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt*

$$\sum_{[e'] \mapsto [e]} \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}([e'])} = \frac{(G : G')}{\# \text{Stab}_G([e])}$$

für alle $[e] \in X(G \setminus \mathcal{T})$ bzw. $[e] \in Y(G \setminus \mathcal{T})$.

BEWEIS: Sei $[e] \in X(G \setminus \mathcal{T})$ bzw. $[e] \in Y(G \setminus \mathcal{T})$ beliebig. Sei $G_e := \text{Stab}_G([e])$ der Stabilisator von $[e]$ in G . Wir lassen G_e auf $G' \setminus G$ durch $(g, G' \gamma) \mapsto (G' \gamma g)$ operieren. Sei $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ ein Vertretersystem der Bahnen von G_e in $G' \setminus G$. Nach der Bahngleichung gilt dann

$$(G : G') = \#G' \setminus G = \sum_{i=1}^n \frac{\#G_e}{\# \text{Stab}_{G_e} \tilde{\gamma}_i} =: (\star)$$

Es ist $\text{Stab}_{G_e} \tilde{\gamma}_i = \{g \in G_e \mid G' \gamma g \in G' \gamma\} = \{g \in G_e \mid \gamma g \in G' \gamma\} = \{g \in G_e \mid g \in \gamma^{-1} G' \gamma\} = \gamma^{-1} G' \gamma \cap G_e$.

Also ist

$$(\star) = \sum_{i=1}^n \frac{\#G_e}{\#(G_e \cap \gamma^{-1} G' \gamma)}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{(G : G')}{\# \text{Stab}_G([e])} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\#(G_e \cap \gamma^{-1} G' \gamma)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\#(\gamma G_e \gamma^{-1} \cap G')} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\#(G' \cap \text{Stab}_G([\gamma e]))} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}([\gamma e])} =: (\star\star) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Knoten (bzw. Kanten) aus $G' \setminus \mathcal{T}$, die über einem Knoten (bzw. einer Kante) $[e]$ aus $G \setminus \mathcal{T}$ liegen, indem wir für ein Repräsentantensystem $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ von $G' \setminus G$ die Knoten $[\gamma_i e]$ nehmen und zwei Knoten $[\gamma_i e]$ und $[\gamma_j e]$ miteinander identifizieren, falls $\gamma_i e \gamma_j^{-1} \in \text{Stab}_G([e])$ liegt. Es gilt also

$$\sum_{[e'] \mapsto [e]} \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}([e'])} = \sum_{\gamma \in G' \setminus G/G_e} \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}([\gamma e])} = (\star\star)$$

■

BEWEIS Satz 2.15: Durch Aufsplitten der Summen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\chi(G') &= \sum_{x \in X(G' \setminus T)} \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}(x)} - \sum_{y \in Y(G' \setminus T)} \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}(y)} \\
&= \sum_{x \in X(G \setminus T)} \sum_{x' \mapsto x} \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}(x')} - \sum_{y \in Y(G \setminus T)} \sum_{y' \mapsto y} \frac{1}{\# \text{Stab}_{G'}(y')} \\
&\stackrel{\text{Lemma 2.16}}{=} \sum_{x \in X(G \setminus T)} \frac{(G : G')}{\# \text{Stab}_G(x)} - \sum_{y \in Y(G \setminus T)} \frac{(G : G')}{\# \text{Stab}_G(y)} = (G : G') \chi(G)
\end{aligned}$$

■

Wir wollen zeigen, dass die Euler-Poincaré-Charakteristik von $\Gamma(N)$ und von $\Gamma_1(N)$ für $N \neq 1$ eine ganze Zahl kleiner Null ist. Dafür brauchen wir noch zwei Lemmata.

Lemma 2.17 *Die Untergruppen $\Gamma(N)$ und $\Gamma_1(N)$ in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ mit $\deg(N) \geq 1$ sind l -torsionsfrei für alle Primzahlen $l \neq \text{Char}(\mathbb{F}_q)$.*

BEWEIS: Wir beweisen die Aussage erst für $\Gamma(N)$. Sei p ein Primteiler von N , dann gilt $\Gamma(N) \subseteq \Gamma(p)$. Wir können also oBdA annehmen, dass $N = p$ prim ist. Sei also γ ein Element in $\Gamma(p)$ mit $\gamma^l = 1$. Sei $\mathfrak{p} = (p)$.

Wir zeigen zunächst, dass aus $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^k}$ auch $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}$ folgt. Dazu fassen wir $A = \mathbb{F}_q[T]$ als Unterring der Vervollständigung $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ auf.

Sei also $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^k}$. Dann ist $\gamma = 1 + p^k M$ mit $M \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ beliebig. Es gilt dann

$$1 = \gamma^l = (1 + p^k M)^l = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (p^k M)^i$$

Also

$$1 \equiv \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (p^k M)^i \equiv 1 + lp^k M \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}$$

Da l teilerfremd zur Charakteristik war, ist l eine Einheit in $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$, also folgt $M \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ und somit $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}$.

Aus $\gamma \in \Gamma(p)$ folgt nun, dass $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Nach Obigem folgt dann über Induktion, dass $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^k}$ ist für alle k . Wegen $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}^n = \{0\}$ folgt $\gamma = 1$.

Für die $\Gamma_1(N)$ beachten wir, dass $\Gamma(N)$ als Kern des Homomorphismus $\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/(N))$ ein Normalteiler in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ ist, und somit auch in $\Gamma_1(N)$.

Da $\Gamma_1(N)/\Gamma(N) \cong \mathbb{F}_q[T]/(N)$ ist, gilt $(\Gamma_1(N) : \Gamma(N)) = q^n$.

Sei $\gamma \in \Gamma_1(N)$ mit $\gamma^l = 1$. Dann gilt für $\bar{\gamma} \in \Gamma_1(N)/\Gamma(N)$ auch $\bar{\gamma}^l = \overline{\gamma^l} = \bar{1} = 1$.

Da der Index $(\Gamma_1(N) : \Gamma(N)) = q^n$ ist, ist $\Gamma_1(N)/\Gamma(N)$ eine p -Gruppe. Also folgt $\bar{\gamma} = 1$, oder mit anderen Worten $\gamma \in \Gamma(N)$. Wie oben folgt dann, dass $\gamma = 1$ gelten muss.

■

Bemerkung 2.18 Für $q \neq 2$ und $l \neq \text{Char}(\mathbb{F}_q)$ ist $\Gamma_0(N)$ nicht notwendigerweise l -torsionsfrei. Als Beispiel kann man eine Skalarmatrix $\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ nehmen. Es gilt dann $\gamma^{q-1} = 1$. Für l einen Primteiler von $q-1$ gilt dann $l \neq \text{Char}(\mathbb{F}_q)$ und $(\gamma^{\frac{q-1}{l}})^l = 1$.

Das folgende Lemma ist eine Übungsaufgabe aus [Se, II.2.3]:

Lemma 2.19 Sei G eine Untergruppe der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$, die l -torsionsfrei ist für alle $l \neq \text{Char}(\mathbb{F}_q)$. Dann teilt $(q-1)(q^2-1)$ den Index $(\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : G)$.

BEWEIS: Sei $q = p^r$. Wir lassen die Gruppe $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ auf $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])/G$ operieren durch $(\gamma, gG) \mapsto \gamma gG$. Sei $[g] \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])/G$ beliebig. Es ist $\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)}([g]) = \{\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q) \mid \gamma g \in gG\} = \{\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q) \mid \gamma \in gGg^{-1}\} = \text{GL}_2(\mathbb{F}_q) \cap gGg^{-1}$, also eine l -torsionsfreie Untergruppe der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Sei $\gamma \in \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)}([g])$ beliebig. Es gilt dann $\text{ord}(\gamma) \mid \text{ord}(\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)) = (q-1)q(q^2-1)$, wegen der l -Torsionsfreiheit gilt also $\text{ord}(\gamma) \mid q$. Insgesamt haben also alle Elemente in $\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)}([g])$ eine p -Potenz als Ordnung, also ist $\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)}([g])$ eine p -Gruppe.

Nach der Bahnengleichung gilt dann für g_1, \dots, g_n ein Vertretersystem der Bahnen der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])/G$:

$$\begin{aligned} (\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : G) &= \#(\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])/G) = \sum_{i=1}^n (\text{GL}_2(\mathbb{F}_q) : \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)}([g_i])) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\#\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)}{\#\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)}([g_i])} = \sum_{i=1}^n \frac{(q-1)(q^2-1)q}{p^{r_i}} = \\ &= \sum_{i=1}^n (q-1)(q^2-1)p^{r-r_i} = (q-1)(q^2-1) \sum_{i=1}^n p^{r-r_i} \end{aligned}$$

Also teilt $(q-1)(q^2-1)$ den Index $(\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : G)$. ■

Korollar 2.20 Für alle l -torsionsfreien Untergruppen der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$, also auch für die Gruppen $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma(N)$, ist die Euler-Poincaré-Charakteristik eine negative ganze Zahl.

BEWEIS: Nach Satz 2.15 gilt für eine Untergruppe G der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ für die Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(G) = \chi(\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])) \cdot (\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : G) = -\frac{1}{(q^2-1)(q-1)} \cdot (\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : G)$. Nach Lemma 2.19 teilt $(q-1)(q^2-1)$ den Index einer l -torsionsfreien Untergruppe in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$, also kürzt sich der Nenner raus und wir erhalten eine negative ganze Zahl. ■

Der nächste Satz liefert den Zusammenhang der Euler-Poincaré-Charakteristik mit dem Quotientengraph $G \setminus \mathcal{T}$. Wir können für l -torsionsfreie Gruppen die Euler-Poincaré-Charakteristik interpretieren als die Zahl der stabilen Knoten minus der Zahl der stabilen Kanten im Quotientengraphen, also können wir sie im wesentlichen durch Abzählen von Knoten und Kanten im Quotientengraph berechnen. Die Euler-Poincaré-Charakteristik ist also in der Tat nützlich. Bevor wir den Satz beweisen, brauchen wir noch ein kleines Lemma:

Lemma 2.21 *Sei $V = K_\infty^2$ und $G \subseteq GL(V)$ eine nicht-triviale endliche p -Gruppe mit $p = \text{Char}(K_\infty)$. Dann fixiert G genau eine Gerade $D_x \in \mathbb{P}^1(K_\infty)$.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, dass G nicht mehr als eine Gerade fixiert. Angenommen, G fixiert die Geraden D_x und D_y , sei dann $\{e_x, e_y\}$ eine Basis von V , so dass $\langle e_x \rangle = D_x$ und $\langle e_y \rangle = D_y$. Sei $s \in G$. Da $sD_x = D_x$, folgt, dass die Darstellungsmatrix von s bezüglich $\{e_x, e_y\}$ von der Form $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ ist. Da $sD_y = D_y$, muss die Darstellungsmatrix von s bezüglich der gleichen Basis von der Form $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ sein. Also ist s bezüglich $\{e_x, e_y\}$ eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Da G eine endliche p -Gruppe ist, folgt dann, dass $1 = s^{p^m} = \begin{pmatrix} \alpha^{p^m} & 0 \\ 0 & \gamma^{p^m} \end{pmatrix}$ ist für ein $m \in \mathbb{N}$. Da $0 = \deg(\alpha^{p^m}) = p^m \cdot \deg(\alpha)$ folgt $\deg(\alpha) = 0$, also $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$. Also gilt $\text{ord}(\alpha) \mid \text{ord}(\mathbb{F}_q^*) = q - 1 = p^n - 1$. Da auch $\alpha^{p^m} = 1$ ist, folgt $\text{ord}(\alpha) \mid \text{ggT}(p^m, p^n - 1) = 1$, also gilt $\alpha = 1$. Genauso folgt $\gamma = 1$, also gilt $s = 1$ für alle $s \in G$, was ein Widerspruch zu G nicht-trivial ist.

Bleibt noch zu zeigen, dass G mindestens eine Gerade in $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ fixiert.

Da G eine p -Gruppe ist, existiert ein $s \in C(G) \setminus \{e\}$. Betrachte $\{e\} \subsetneq \langle s \rangle \subseteq G$. Da $\langle s \rangle$ eine endliche p -Gruppe ist, ist s konjugiert zu einem Element der Form $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (die Jordan-Normalform von s). Also ist $V^{\langle s \rangle} \cong K_\infty$.

Da $s(gv) = gsv = gv$ für alle $g \in G, v \in V^{\langle s \rangle}$, operiert $G/\langle s \rangle$ auf $V^{\langle s \rangle} \cong K_\infty$. Da aber $\text{End}_{K_\infty}(K_\infty) = K_\infty^*$ kein Element der Ordnung p enthält, ist die Operation trivial. Also wird die Gerade $D_s := V^{\langle s \rangle}$ von ganz G fixiert.

■

Korollar 2.22 *Sei Γ_u eine l -torsionsfreie Untergruppe von $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$. Dann existiert zu jedem instabilen Knoten e der Stufe $i \geq 1$ ein eindeutiges Ende w des Graphen \mathcal{T} mit e als Startknoten und $\text{Stab}_{\Gamma_u}(e) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_u}(w)$. Dieser Pfad liegt komplett im instabilen Bereich von \mathcal{T} und enthält keinen Knoten der Stufe 0.*

BEWEIS: Sei $e = \gamma(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ mit $\gamma \in GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ und sei $G := \text{Stab}_{\Gamma_u}(e)$. Dann ist G eine endliche nicht-triviale p -Gruppe. G fixiert also nach Lemma 2.21 genau eine Gerade in $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. Nach Bemerkung 1.7 entsprechen die Enden von \mathcal{T} bijektiv $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. G fixiert also genau ein Ende b_e von \mathcal{T} . Sei $w = e \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots$ der zugehörige Pfad. Da G das Ende b_e fixiert, liegt der Pfad w komplett im instabilen Bereich von \mathcal{T}_∞ . Angenommen, b_e enthält einen Knoten der Stufe 0. Sei e_k die Kante $\gamma(\Lambda_k, \Lambda_{k+1})$. Dann fixiert G sowohl das Ende b_e als auch das zum Pfad $\tilde{w} = e_i \rightarrow e_{i+1} \rightarrow e_{i+2} \rightarrow \dots$ gehörende Ende \tilde{b}_e . Da \tilde{w} nur Knoten der Stufe $k \geq i$ enthält, gilt $b_e \neq \tilde{b}_e$. Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit aus Lemma 2.21. ■

Satz 2.23 *Sei G l -torsionsfrei. Dann ist $\chi(G) = l_0 - l_1$, wobei l_0 und l_1 die natürlichen Zahlen aus Definition 2.7 sind.*

BEWEIS: Wir können die Summe

$$\chi(\Gamma_u) := \sum_{x \in X(\Gamma_u \setminus \mathcal{T})} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \sum_{y \in Y(\Gamma_u \setminus \mathcal{T})} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)}$$

zerlegen als

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma_u) &= \sum_{x \in X(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}_\infty)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \sum_{y \in Y(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}_\infty)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)} \\ &+ \sum_{x \in X(\Gamma_u \setminus S_0)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \sum_{y \in Y(\Gamma_u \setminus S_1)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)} \end{aligned}$$

Für $x \in X(\Gamma_u \setminus S_0)$ (bzw. für $y \in Y(\Gamma_u \setminus S_1)$) gilt $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x) = \{1\}$ (bzw. $\text{Stab}_{\Gamma_u}(y) = \{1\}$). Also ist

$$\sum_{x \in X(\Gamma_u \setminus S_0)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \sum_{y \in Y(\Gamma_u \setminus S_1)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)} = \#\Gamma_u \setminus S_0 - \#\Gamma_u \setminus S_1 = l_0 - l_1$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass

$$\sum_{x \in X(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}_\infty)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \sum_{y \in Y(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}_\infty)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)} = 0$$

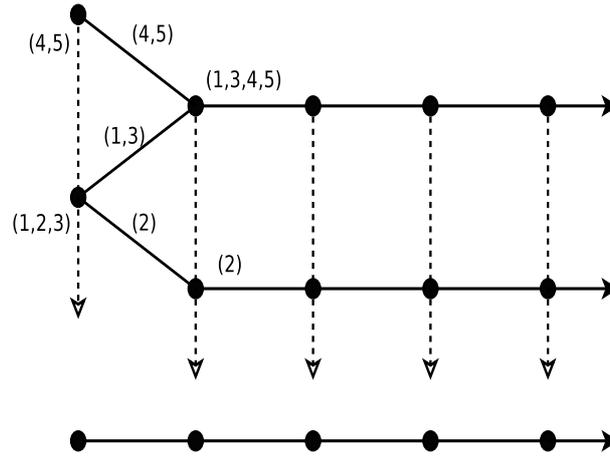
ist.

Sei $x \in X(\mathcal{T}_\infty)$. Dann ist $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)$ eine nicht-triviale, endliche Untergruppe von Γ_u . Da Γ_u nach Voraussetzung l -torsionsfrei war, ist $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)$ eine p -Gruppe in $\Gamma_u \subset \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \subset \text{GL}_2(K_\infty)$. Nach Lemma 2.21 fixiert $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)$ dann genau eine Gerade $D_x \in \mathbb{P}^1(K_\infty)$. Nach Bemerkung 1.7 fixiert $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)$ also genau ein Ende b_x des Graphen \mathcal{T} . Sei $w = x \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ der zu b_x gehörende Pfad. Da $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)$ den gesamten Pfad fixiert, ist w ein Pfad in \mathcal{T}_∞ . Wir können nun dem Knoten $x \in \mathcal{T}_\infty$ die Kante (x, x_1) zuordnen. Es ist $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x) \supseteq \text{Stab}_{\Gamma_u}((x, x_1))$. Aber es gilt auch $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_u}((x, x_1))$, da $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)$ den gesamten Pfad w fixiert. Also gilt $\text{Stab}_{\Gamma_u}(x) = \text{Stab}_{\Gamma_u}((x, x_1))$ und somit $\frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}((x, x_1))} = 0$.

Die Zuordnung $x \mapsto (x, x_1)$ ist aber bijektiv. Denn sei (x_1, x_2) eine beliebige Kante in \mathcal{T}_∞ . Dann ist Stab_{Γ_u} wieder eine nicht-triviale endliche p -Gruppe, fixiert nach Lemma 2.21 also genau ein Ende $b_{(x_1, x_2)}$. Sei $w = x_1 \xrightarrow{(x_1, x_2)} x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$ der eindeutige kürzeste Pfad ohne Zurücklaufen, der zu $b_{(x_1, x_2)}$ gehört und die Gerade (x_1, x_2) enthält. Dann können wir der Gerade (x_1, x_2) den Knoten x_1 zuordnen, also den Anfangsknoten des Pfades w . Die Zuordnung $x \mapsto (x, x_1)$ ist also bijektiv und somit ist

$$\sum_{x \in X(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}_\infty)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(x)} - \sum_{y \in Y(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}_\infty)} \frac{1}{\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(y)} = 0$$

■

Abbildung 5: Der Quotientengraph von $\Gamma_0(T^2 + T + 1) \setminus \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

Dass die Bedingung l -torsionsfrei wichtig ist, sehen wir an dem Beispiel $\Gamma_0(T^2 + T + 1) \setminus \mathcal{T}$, siehe Abbildung 5

Beispiel 2.24 Ein Vertretersystem von $\Gamma_0(T^2 + T + 1) \setminus \text{GL}_2(\mathbb{F}_2[T])$ ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2[T]/(T^2 + T + 1))$, also die fünf Tupel $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(T, 1)$ und $(T + 1, 1)$. Diese Ergänzen wir zu Matrizen

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In Abbildung 5 sind die zu den verschiedenen Vertretern gehörenden Knoten und Kanten entsprechend beschriftet. Für den isoliert liegenden Knoten $s_4\Lambda_0$ der Stufe 0 rechnet man jetzt nach, dass für den Stabilisator $\Gamma_{s_4} := \text{Stab}_{\Gamma_0(T^2 + T + 1)}(s_4\Lambda_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{s_4} &= \Gamma_0(T^2 + T + 1) \cap s_4 \text{GL}_2(\mathbb{F}_2) s_4^{-1} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T + 1 & 1 \\ T^2 + T + 1 & T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T & 1 \\ T^2 + T + 1 & T + 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

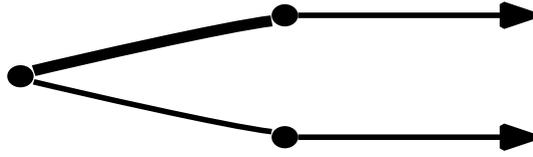
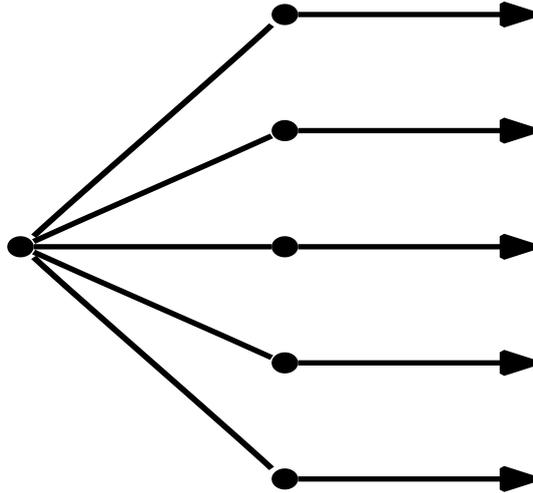
Die Knoten in \mathcal{T} über $s_4\Lambda_0$ sind also instabile Knoten, deren Stabilisatoren konjugiert zu einer 3-Gruppe in $\Gamma_0(T^2 + T + 1)$ sind.

Ebenso rechnet man nach, dass der Stabilisator von $s_4\Lambda_1$ trivial ist. Die Knoten über $s_4\Lambda_1$ sind also stabil und ein Knoten in \mathcal{T} über $s_4\Lambda_0$ hat nur stabile Nachbarknoten. Wir finden hier also keinen Pfad nach unendlich, der nur aus instabilen Knoten besteht.

Als Beispiele für die Anwendung des Satzes können wir uns die Graphen von $\Gamma_1(T) \setminus \mathcal{T}$ und $\Gamma(T) \setminus \mathcal{T}$ ansehen.

Beispiel 2.25 Für die $\Gamma_1(T)$ ist ein Repräsentantensystem von $\Gamma_1(T)$ in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ nach Satz 1.25 gegeben durch $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (c, d) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q^*, (c, d) \in \mathbb{F}_q[T]/(T), \text{ggT}(c, d) = 1 \right\}$,

also durch $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (c, d) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q^*, (c, d) \in \mathbb{F}_q^2 \setminus (0, 0) \right\}$. Insgesamt haben wir also genau $(q - 1)(q^2 - 1)$ Elemente im Vertretersystem, also ist die Euler-Poincare-Charakteristik der $\Gamma_1(T) = -1$. Dies passt dazu, dass wir keine stabilen Knoten und genau eine stabile Kante in der Stufe $(0, 1)$ haben. In Abbildung 6 ist die stabile Kante fett eingezeichnet.

Abbildung 6: Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T)\backslash\mathcal{T}$ Abbildung 7: Der Quotientengraph von $\Gamma(T)\backslash\mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_4$

Beispiel 2.26 Für die $\Gamma(T)$ ist nach Satz 1.24 ein Repräsentantensystem von $\Gamma(T)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ gegeben durch $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/(T)) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q^* \right\}$, also durch $(q-1)\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ viele Elemente. Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ genau $(q^2-1)q$ Elemente hat, berechnet sich die Euler-Poincaré-Charakteristik von $\Gamma(T)$ zu $-q$. In der Tat haben wir hier einen stabilen Knoten und $q+1$ stabile Kanten, siehe Abbildung 7.

2.4 Die Struktur des Quotientengraphen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Struktur des Quotientengraphen von $\Gamma_u\backslash\mathcal{T}$ für Γ_u eine der Gruppen $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$ (letzteres nur im Fall $q=2$). Insbesondere klären wir die lokale Struktur in der Nähe von Knoten des Quotientengraphen komplett. Dabei wurden die Gruppen $\Gamma_0(N)$ schon in [No] von U. Nonnengardt untersucht und die lokale Struktur geklärt. Allerdings verwendet Nonnengardt dort einen anderen Begriff von Stabilität und zeigt insbesondere auch nicht, dass der stabile Bereich des Quotientengraphen zusammenhängend ist. Dies ist für unsere algorithmischen Anwendungen allerdings wichtig, so dass wir auch die Gruppe $\Gamma_0(N)$ hier noch einmal kurz untersuchen.

2.4.1 $\Gamma(N)$

Als erstes wollen wir die Graphen $\Gamma(N)\backslash\mathcal{T}$ genauer untersuchen. Da $\Gamma(N)$ ein Normalteiler in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ ist, ist hier die Situation besonders einfach. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.27 *Sei v ein Knoten der Stufe $i \geq 1$ in $X(\mathcal{T})$. Dann ist v genau dann $\Gamma(N)$ -stabil, falls $i < \deg(N)$ ist.*

BEWEIS: Da v vom Typ i ist, liegt v über Λ_i in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \setminus \mathcal{T}$. Es gibt also ein $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ mit $\gamma\Lambda_i = v$. Für den Stabilisator von v in $\Gamma(N)$ gilt dann:

$$\mathrm{Stab}_{\Gamma(N)}(v) = \Gamma(N) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\gamma\Lambda_i) = \Gamma(N) \cap \gamma \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) \gamma^{-1}$$

Also ist $\alpha \in \mathrm{Stab}_{\Gamma(N)}(v)$ genau dann, wenn $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ in

$$\gamma^{-1} \mathrm{Stab}_{\Gamma(N)}(v) \gamma = \gamma^{-1} \Gamma(N) \gamma \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) = \Gamma(N) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i)$$

ist.

Nach Satz 1.17 ist

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & r \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{F}_q^*, r \in \mathbb{F}_q[T], \deg(r) < i \right\}$$

Also ist

$$\Gamma(N) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i) = \begin{cases} \{1\} & \text{für } i < \deg(N) \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r'N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(r') < i - \deg(N) \right\} & \text{für } i \geq \deg(N) \end{cases}$$

v ist also genau dann stabil, falls $i < \deg(N)$ ist. ■

Der Beweis zeigt insbesondere auch, dass für die $\Gamma(N)$ die Stabilisatoren instabiler Knoten der gleichen Stufe konjugiert sind, und jeweils genau $q^{i+1-\deg(N)}$ viele Elemente haben. Der Beweis liefert ausserdem einen effektiven Algorithmus, um den Stabilisator einer Kante zu berechnen.

Lemma 2.28 *Ein Knoten v der Stufe 0 in $X(\mathcal{T})$ ist $\Gamma(N)$ -stabil.*

BEWEIS: Sei $n := \deg(N)$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $n \geq 2$ ist. Nach Lemma 2.27 sind dann alle Knoten der Stufe 1 stabil. Angenommen, es existiert ein instabiler Knoten v der Stufe 0. Sei $\Gamma_v := \mathrm{Stab}_{\Gamma(N)}(v)$. Da die Gruppe $\Gamma(N)$ nach Lemma 2.17 l -torsionsfrei ist, fixiert Γ_v nach Lemma 2.21 genau ein Ende des Graphen \mathcal{T} . Das heißt, es muss einen Pfad in $\Gamma(N) \setminus \mathcal{T}$ nach Unendlich geben, der komplett aus instabilen Knoten besteht. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass alle Knoten der Stufe 1 stabil sind.

Den Fall, dass $n = 1$ ist, haben wir schon in Beispiel 2.26 behandelt. Für ein Polynom N vom Grad 1 ist das Vertretersystem von $\Gamma(N) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ gleich

$$\begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$$

Über der Stufe 0 fallen zwei Knoten $s_i\Lambda_0, s_j\Lambda_0$ aus der Überlagerung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \setminus \mathcal{T}$ genau dann zusammen, falls es ein $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ gibt mit $s_i\gamma s_j^{-1} \in \Gamma(N)$. Da s_i, s_j selber aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ waren, gibt es natürlich solch ein γ . Folglich fallen alle Knoten der Stufe 0 in $\Gamma(N) \setminus \mathcal{T}$ zusammen. Da für den Knoten Λ_0 gilt $\mathrm{Stab}_{\Gamma(N)}(\Lambda_0) = \Gamma(N) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) = \{1\}$, ist dies ein stabiler Knoten. Wir erhalten also hier genau das Bild aus Abbildung 7. ■

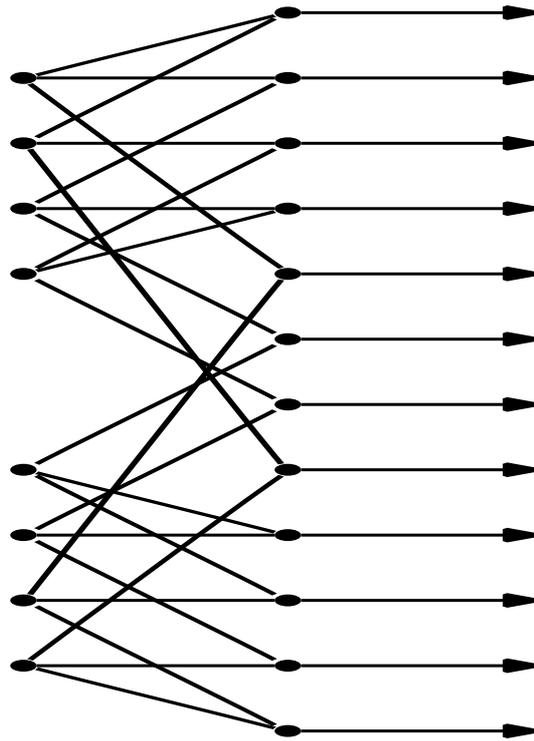


Abbildung 8: Der Quotientengraph von $\Gamma(T^2)\backslash\mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

Nach Bemerkung 2.9 wissen wir dann also auch, dass alle Kanten zwischen 0 und 1 und alle weiteren Kanten bis zu den Kanten zwischen Knoten der Stufe $n - 1$ und n stabil sind. Da für $i \geq 1$ der Stabilisatoren einer Kante $(\gamma\Lambda_i, \gamma\Lambda_{i+1})$ gleich dem Stabilisatoren des Knotens $\gamma\Lambda_i$ ist, gibt es sonst keine weiteren stabilen Kanten.

Insbesondere sehen wir, dass der stabile Bereich in $\Gamma(N)\backslash\mathcal{T}$ zusammenhängend ist. Nach Satz 1.30 wissen wir auch, dass ab der Stufe $i = \deg(N)$ in $\Gamma(N)\backslash\mathcal{T}$ keine Knoten und Kanten mehr zusammenfallen. Damit und mit Satz 2.10 kennen wir also die gesamte Struktur des Graphens $\Gamma(N)\backslash\mathcal{T}$. Weiter sehen wir, dass im Fall der $\Gamma(N)$ auch die Umkehrung von Satz 2.10 gilt. Der folgende Satz fasst zusammen, welche möglichen Knoten auftreten können:

Satz 2.29 *In $\Gamma(N)\backslash\mathcal{T}$ treten nur die folgenden Typen von Knoten auf:*

Stufe 0	Stufe i mit $1 \leq i < \deg(N)$	Stufe i mit $i \geq \deg(N)$
<p>$q + 1$</p>	<p>q</p>	

Auch über die Anzahl der Knoten und Kanten einer bestimmten Stufe und über die Anzahl der Spitzen von $\Gamma(N)\backslash\mathcal{T}$ können wir eine präzise Aussage treffen:

Satz 2.30 *Sei $n := \deg(N)$ und sei $m := (\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma(N))$. Für die Anzahl der Knoten, Kanten und Spitzen in $\Gamma(N)\backslash\mathcal{T}$ gilt:*

- (a) Es gibt $\frac{m}{q(q-1)(q^2-1)}$ Knoten der Stufe 0.
- (b) Es gibt $\frac{(q+1)m}{q(q-1)(q^2-1)}$ Kanten zwischen 0 und 1.
- (c) Für $1 \leq i < n$ gibt es $\frac{(q+1)m}{q^{i+1}(q-1)(q^2-1)}$ Knoten der Stufe i beziehungsweise Kanten zwischen i und $i+1$.
- (d) Es gibt $\frac{(q+1)m}{q^n(q-1)(q^2-1)}$ Spitzen.

BEWEIS: Bezeichne l'_0 die Anzahl der Knoten der Stufe 0 und l'_1 die Anzahl der Kanten zwischen 0 und 1. Da ab der Stufe 1 zu jedem stabilen Knoten der Stufe i eine stabile Kante der Stufe $i+1$ gehört, gilt $l'_0 - l'_1 = l_0 - l_1$.

Nach Satz 2.15 und Satz 2.23 gilt dann:

$$-\frac{m}{(q-1)(q^2-1)} = \chi(\Gamma(N)) = l_0 - l_1 = l'_0 - l'_1$$

Da für $\Gamma(N)$ an jedem Knoten der Stufe 0 genau $q+1$ Kanten zwischen 0 und 1 angrenzen, gilt $l'_1 = ql'_0$.

Also ist

$$-\frac{m}{(q-1)(q^2-1)} = l'_0 - (q+1)l'_0 = -ql'_0$$

Daraus folgen (a) und (b).

(c) gilt, da in einen Knoten der Stufe i mit $1 \leq i < n$ genau q Kanten zwischen $i-1$ und i münden.

(d) folgt dann, da ab der Stufe $n-1$ keine Kanten mehr zusammen fallen. ■

Beispiel 2.31 Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ irreduzibel. Dann ist $m = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma(N)) = (q-1)(\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])/N) = (q-1)(\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^n}) = (q-1)(q^{2n}-1)q^n$.

Für die Zahl der Knoten der Stufe 0 gilt dann:

$$l'_0 = \frac{(q-1)(q^{2n}-1)q^n}{q(q-1)} = \frac{q^{2n}-1}{q-1}q^{n-1} = \sum_{i=0}^{2n-1} q^{n-1+i}$$

Für die Zahl der Kanten zwischen 0 und 1 gilt:

$$l'_1 = (q+1) \sum_{i=0}^{2n-1} q^{n-1+i}$$

Entsprechend gibt es

$$(q+1) \sum_{i=0}^{2n-1} q^{n-1+i-k}$$

Knoten der Stufe $1 \leq k < n$ und

$$(q+1) \sum_{i=0}^{2n-1} q^i$$

Spitzen.

2.4.2 $\Gamma_1(N)$

Die Untergruppen $\Gamma_1(N)$ sind keine Normalteiler in der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Deswegen ist die Situation hier etwas komplizierter. Um einen Überblick über den stabilen Bereich zu bekommen, ist unser erstes Ziel, das Wachstumsverhalten von Stabilisatoren entlang eines instabilen Pfades nach Unendlich zu untersuchen. Wir wollen zeigen, dass die Größe der Stabilisatoren regelmäßig in q -Potenzen wächst. Dafür brauchen wir vorher ein wichtiges Lemma.

Lemma 2.32 Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$.

Sei weiter $\pi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ die natürliche Reduktion und $\bar{\Gamma}$ das Bild von $\Gamma_1(N)$ unter π .

- (a) Sei $i \geq 1$ und sei \bar{G}_i das Bild von $G_i := \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_i)$ unter π . Falls $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i \neq \{1\}$ ist, existiert ein Teiler M_γ von N , so dass $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(x) \leq i \text{ und } M_\gamma \text{ teilt } x \right\}$ ist.
- (b) Sei \bar{G}_0 das Bild von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_0) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_1)$ unter π . Falls $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_0 \neq \{1\}$ ist, so ist $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}_q \right\}$

BEWEIS: (a) Wir betrachten zuerst den Fall $N = p^e$ mit p irreduzibel.

Zu $x \in \mathbb{F}_q[T]/p^e$ sei $v_p(x)$ die höchste Potenz von p , die x teilt, und sei $v_p(0) := e$.

Wir wollen die Menge $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i$ verstehen. Angenommen, $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i \neq \{1\}$. Dann gibt es Matrizen

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 & \beta \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{F}_q^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q[T]$, $\deg(\beta) \leq i$, $\alpha \neq 0$ und

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma = \gamma \begin{pmatrix} x_1 & \beta \\ 0 & x_2 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 & a\beta + bx_2 \\ cx_1 & c\beta + dx_2 \end{pmatrix}$$

Also gilt $x_1 = 1$. Da

$$\det(\gamma^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma) = \det(\gamma)^{-1} \det(\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \det(\gamma) = 1$$

ist, folgt aus

$$x_2 = \det(\begin{pmatrix} x_1 & \beta \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}) = \det(\gamma^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma) = 1$$

auch $x_2 = 1$.

Es folgt $\alpha c = 0 = \beta c$ und $\alpha d = a\beta$.

Da nach Voraussetzung $\alpha \neq 0$ ist, folgt $v_p(c) > 0$. (\star)

Da $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/p^e)$ ist, muss dann aber $v_p(a) = v_p(d) = 0$ gelten. Sonst teilt p auch $ad - bc$, also ist $ad - bc \not\equiv 1 \pmod{p^e}$.

Folglich sind $a, d \in (\mathbb{F}_q[T]/p^e)^*$ und es gilt $\beta = \frac{d}{a}\alpha$, also $v_p(\beta) = v_p(\frac{d}{a}) + v_p(\alpha) = v_p(\alpha)$. Aus $\alpha c = 0$ folgt dann $v_p(c) + v_p(\alpha) \geq e$. ($\star\star$)

Falls $v_p(c) = 0$ ist, so folgt aus (\star) , dass

$$\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist. Falls $v_p(c) =: f > 0$ ist, so definiere $M_\gamma := p^{e-f}$. Die Behauptung ist dann, dass

$$\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(\beta) \leq i \text{ und } v_p(\beta) \geq e - f \right\}$$

ist.

„ \subseteq “ gilt nach $(\star\star)$.

Für „ \supseteq “ sei $\beta \in \mathbb{F}_q[T]/p^e$ mit $\deg(\beta) \leq i$ und $v_p(\beta) \geq e - f$ beliebig gegeben. Definiere $\alpha := \frac{a}{d}\beta$. Dann ist $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, da a, d wieder in $(\mathbb{F}_q[T]/p^e)^\times$ sind. Da $v_p(\alpha) \geq e - f$ ist, ist $v_p(\alpha c) = v_p(\alpha) + v_p(c) \geq e - f + f = e$, also ist $\alpha c = 0$. Genauso ist $\beta c = 0$. Nach Definition ist $d\alpha = a\beta$. Es folgt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i$$

und es folgt „ \supseteq “.

Die Behauptung ist also für $N = p^e$ gezeigt.

Sei nun $N = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ beliebig. Nach dem Chinesischen Restsatz ist dann

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N) \cong \prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/p_i^{e_i})$$

Sei $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ gegeben und $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ die entsprechenden Komponenten in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/p_i^{e_i})$. Es ist dann

$$\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i \cong (\gamma_1^{-1}\bar{\Gamma}\gamma_1 \cap \bar{G}_i, \dots, \gamma_k^{-1}\bar{\Gamma}\gamma_k \cap G_i)$$

und in den einzelnen Komponenten erhalten wir Teiler M_{γ_j} von $p_j^{e_j}$ mit

$$\gamma_j^{-1}\bar{\Gamma}\gamma_j \cap \bar{G}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid M_{\gamma_j} \text{ teilt } \alpha \right\}$$

also insgesamt einen Teiler $M_\gamma := \prod_{j=1}^k M_{\gamma_j}$ von N mit

$$\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid M_\gamma \text{ teilt } \alpha \right\}$$

(b) Hier ist zu beachten, dass $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)}(\Lambda_0) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)}(\Lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & c \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{F}_q^\times, c \in \mathbb{F}_q \right\}$ ist. Der Beweis geht dann genauso wie in (a). Man erhält als notwendige und hinreichende Bedingung für einen nicht-trivialen Schnitt, dass $v_p(c) = e$ ist. In diesem Fall erhält man dann $M_\gamma = p^{e-v_p(c)} = p^{e-e} = 1$, und also $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_q \right\}$. ■

Bemerkung 2.33 Wir erhalten also als expliziten Wert von M_γ :

$$M_\gamma = \prod_{p|N} p^{\text{ord}_p(N) - \text{ord}_p(c)} = \frac{N}{\text{ggT}(N, c)}.$$

Bemerkung 2.34 Ist $\mathbb{F}_q[T]/N$ ein Produkt von Körpern, so folgt aus der Existenz der Jordanform für Matrizen direkt $x_1 = x_2 = 1$. Denn in diesem Fall ist die Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & \beta \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ konjugiert zu einer Matrix mit doppeltem Eigenwert 1.

Im Beweis vom Satz werden wir noch die folgende elementare mengentheoretische Aussage benutzen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit formuliere ich sie vorher als kurzes Lemma:

Lemma 2.35 Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen Mengen, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Dann ist $A \cap f^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(f(A) \cap B)$.

BEWEIS: „ \subseteq “: Sei $x \in A \cap f^{-1}(B)$. Dann ist $f(x) \in B \cap f(A)$, also $x \in f^{-1}(f(A) \cap B)$.
 „ \supseteq “: Sei $x \in A \cap f^{-1}(f(A) \cap B)$. Dann gilt auch $x \in f^{-1}(B)$. Also $x \in A \cap f^{-1}(B)$. ■

Satz 2.36 Sei $x \in X(\mathcal{T})$ ein $\Gamma_1(N)$ -instabiler Knoten der Stufe $i \geq 1$ und sei $x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$ der nach Lemma 2.21 eindeutige instabile Pfad nach Unendlich. Dann gilt $\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_i) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_{i+1})$ und $\#(\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_{i+1})/\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_i)) = q$.

BEWEIS: Sei $\gamma \Lambda_i$ ein Vertreter des Knotens x in $\Gamma_1(N) \backslash X(\mathcal{T})$ mit $\gamma \in \Gamma_1(N) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Dann ist $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ und der Stabilisator von x_i in $\Gamma_1(N)$ ist $\gamma G_i \gamma^{-1} \cap \Gamma_1(N)$.

Sei $\pi : \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ die Reduktionsabbildung. Sei $\bar{G}_i := \pi(G_i)$ und $\bar{\Gamma} := \pi(\Gamma_1(N))$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma G_i \gamma^{-1} \cap \Gamma_1(N) &= \gamma G_i \gamma^{-1} \cap \pi^{-1}(\bar{\Gamma}) \stackrel{\text{Lemma 2.35}}{=} \gamma G_i \gamma^{-1} \cap \pi^{-1}(\pi(\gamma G_i \gamma^{-1}) \cap \bar{\Gamma}) \\ &= \gamma G_i \gamma^{-1} \cap \pi^{-1}(\gamma \pi(G_i) \gamma^{-1} \cap \bar{\Gamma}) = \gamma G_i \gamma^{-1} \cap \gamma \pi^{-1}(\bar{G}_i \cap \gamma^{-1} \bar{\Gamma} \gamma) \gamma^{-1} \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.32(a)}}{=} \gamma G_i \gamma^{-1} \cap \gamma \pi^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(c) \leq i \text{ und } M_{\gamma^{-1}} \text{ teilt } c \right\} \gamma^{-1} \\ &= \gamma (G_i \cap \pi^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(c) \leq i \text{ und } M_{\gamma^{-1}} \text{ teilt } c \right\}) \gamma^{-1} \\ &= \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_q[T], \deg(c) \leq i \text{ und } M_{\gamma^{-1}} \text{ teilt } c \right\} \gamma^{-1} \end{aligned}$$

Da die Menge

$$\gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_q[T], \deg(c) \leq i \text{ und } M_{\gamma^{-1}} \text{ teilt } c \right\} \gamma^{-1}$$

mit wachsendem i um genau q Elemente größer wird, folgt die Behauptung. ■

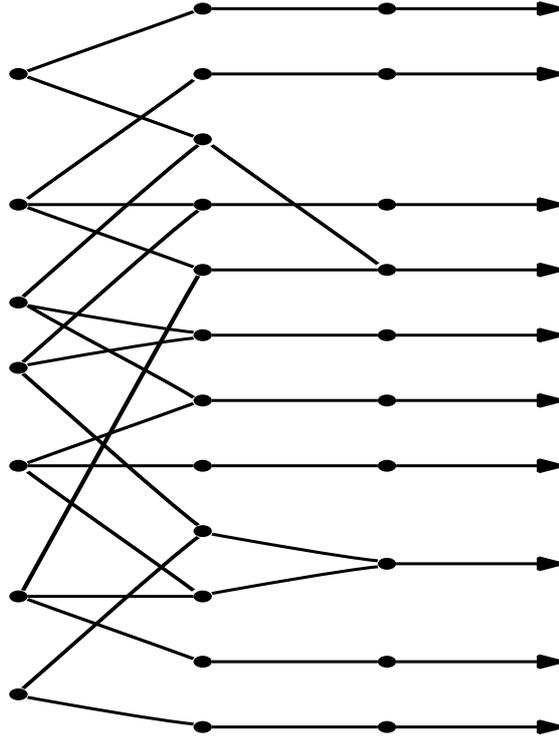


Abbildung 9: Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^2 * (T + 1)) \setminus \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

Dieser Satz verallgemeinert Lemma 2.4. In dem Lemma haben wir gezeigt, dass ab einem festen $i \in \mathbb{N}$ die Größe der Stabilisatoren jeweils um eine q -Potenz wächst. Jetzt haben wir gezeigt, dass dies schon ab dem ersten instabilen Knoten passiert.

Für instabile Kanten zwischen den Stufen 0 und 1 bekommen wir eine ähnliche Aussage:

Satz 2.37 Sei $(x_1, x_2) = y \in Y(T)$ eine $\Gamma_1(N)$ -instabile Kante zwischen Knoten der Stufe 0 und 1 und sei $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$ der nach Lemma 2.21 eindeutige instabile Pfad nach Unendlich. Dann gilt $\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(y) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_2)$ und $\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_i) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_{i+1})$ für $i \geq 2$ und $\#(\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_2)/\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(y)) = q$ bzw. $\#(\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_{i+1})/\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_i)) = q$ für $i \geq 2$.

BEWEIS: Der Beweis geht analog zu dem Beweis von Satz 2.36. Der einzige Unterschied ist hier, dass der Stabilisator der Kante $y = (\gamma\Lambda_0, \gamma\Lambda_1)$ gleich $\gamma(G_0 \cap G_1)\gamma^{-1} \cap \Gamma_1(N)$ ist. Wir können dann auf die gleiche Art wie im vorherigen Beweis Lemma 2.32(b)

anwenden, wobei $M_{\gamma^{-1}} = 1$ gilt und erhalten $\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(y) = \gamma\left\{\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_q\right\}\gamma^{-1}$

bzw. $\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x_i) = \gamma\left\{\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_q[T], \deg(c) \leq i\right\}\gamma^{-1}$ für $i \geq 1$. ■

Algorithmus 2.38 Die Sätze 2.36 und 2.37 liefern gleichzeitig einen sehr effektiven Algorithmus, um den Stabilisator einer Kante $[\gamma\Lambda_i, \gamma\Lambda_{i+1}]$ der Stufe i zu berechnen:

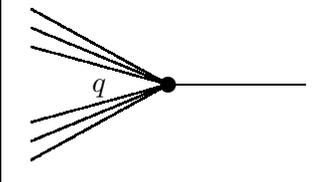
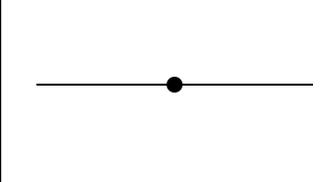
1. Berechne $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

2. Setze $M_{\gamma^{-1}} := \frac{N}{\text{ggT}(N,c)}$
3. Falls $\deg(M_{\gamma^{-1}}) > i$ ist, ist die Kante $[\gamma\Lambda_i, \gamma\Lambda_{i+1}]$ stabil.
4. Ansonsten ist der Stabilisator die Menge

$$\gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & M_{\gamma^{-1}}\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \eta \in \mathbb{F}_q[T], \deg(\eta) \leq i - \deg(M_{\gamma^{-1}}) \right\} \gamma^{-1}$$

Mit Hilfe von Satz 2.36 und Satz 2.37 können wir jetzt zeigen, dass in $\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T}$ Knoten der Stufe $i \geq 1$ entweder stabil sind, oder Spitzenknoten sind, also genau ein Knoten der Stufe $i - 1$ eine gemeinsame Kante in $\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T}$ hat.

Korollar 2.39 In $\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T}$ gibt es nur die folgenden beiden Typen von Knoten der Stufe $i \geq 1$:

$x \in X(\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T})$ stabil	$x \in X(\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T})$ instabil
	

BEWEIS: Sei $x \in X(\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T})$ ein Knoten der Stufe $i \geq 1$. Falls x stabil ist, so hat x nach Satz 2.10 im Quotientengraphen genau $q + 1$ Nachbarn.

Sei $x = \gamma\Lambda_i$ ein instabiler Knoten der Stufe $i \geq 2$. Dann gilt für $U_i := \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x)$ nach Satz 2.36 $\#U_i = q^k$ (mit $k \in \{1, 2, \dots, i\}$) und für $U_{i-1} := \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(\gamma\Lambda_{i-1})$ ebenso $\#U_{i-1} = q^{k-1}$, also $\#U_i/U_{i-1} = q$. Sei e_{i-1} die Kante $(\gamma\Lambda_{i-1}, \gamma\Lambda_i)$ und e_i die Kante $(\gamma\Lambda_i, \gamma\Lambda_{i+1})$. U_i/U_{i-1} fixiert dann die Kante e_i und operiert auf den anderen q Kanten, die $\gamma\Lambda_i$ enthalten. Wir wollen zeigen, dass die Operation transitiv ist. Seien $\lambda_1 := 1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ die q verschiedenen Elemente in U_i/U_{i-1} , und seien $e'_1 := e_{i-1}, e'_2, \dots, e'_q$ die q Kanten ungleich e_i , die $\gamma\Lambda_i$ enthalten. Angenommen, die Operation ist nicht transitiv. Dann ist also $\#\{e'_1, \lambda_2 e'_1, \dots, \lambda_q e'_1\} < q$, also gibt es $j \neq j'$ mit $\lambda_j e'_1 = \lambda_{j'} e'_1$. Dann ist aber $\lambda_j^{-1} \lambda_{j'} e'_1 = e'_1$, also $\lambda_j^{-1} \lambda_{j'} \in \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(e'_1) = U_{i-1}$, was ein Widerspruch zu $j \neq j'$ ist.

Die Operation von U_i/U_{i-1} auf den q Kanten ungleich e_i , die $\gamma\Lambda_i$ enthalten, ist also transitiv. Diese Kanten fallen in $\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T}$ also alle zusammen, was zu zeigen war.

Sei nun $x = \gamma\Lambda_1$ ein instabiler Knoten der Stufe 1. Hier unterscheiden wir 2 Fälle.

Falls die Kante $(\gamma\Lambda_0, \gamma\Lambda_1)$ stabil ist, so enthält $\#\text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(x)$ nach Satz 2.36 genau q Elemente. $U_1 := \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(\gamma\Lambda_1)$ operiert dann wie oben transitiv auf den Kanten ungleich $e_1 := (\gamma\Lambda_1, \gamma\Lambda_2)$, die $\gamma\Lambda_1$ enthalten, und diese q Kanten fallen in $\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T}$ zusammen.

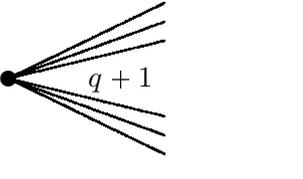
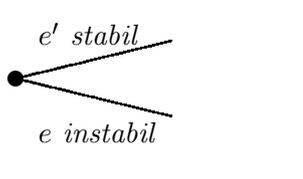
Falls die Kante $(\gamma\Lambda_0, \gamma\Lambda_1)$ instabil ist, so gilt nach Satz 2.37

$$U_0 := \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}((\gamma\Lambda_0, \gamma\Lambda_1)) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(\gamma\Lambda_1) =: U_1$$

und $\#U_0 = q$ beziehungsweise $\#U_1 = q^2$ und U_1/U_0 operiert wieder wie oben transitiv auf den Kanten ungleich $e_1 := (\gamma\Lambda_1, \gamma\Lambda_2)$, die $\gamma\Lambda_1$ enthalten, und diese q Kanten fallen im Quotientenbaum $\Gamma_1(N) \setminus \mathcal{T}$ wieder zusammen. ■

Mit dem bisher Gezeigten können wir ebenfalls beweisen, dass es nur 2 verschiedene Typen von Knoten der 0-ten Stufe gibt.

Korollar 2.40 *In $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{T}$ gibt es nur die folgenden beiden Typen von Knoten der Stufe 0:*

$x \in X(\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{T})$ stabil	$x \in X(\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{T})$ instabil
	

BEWEIS: Falls $x \in X(\mathcal{T})$ ein $\Gamma_1(N)$ -stabiler Knoten der Stufe 0 ist, so hat x nach Satz 2.10 in $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{T}$ genau $q + 1$ Nachbarknoten.

Falls $x \in X(\mathcal{T})$ instabil ist, gibt es nach Korollar 2.22 einen eindeutigen Strahl $x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \dots$ instabiler Knoten und Kanten in \mathcal{T} nach Unendlich mit Anfangspunkt x . In $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{T}$ gibt es daher genau eine instabile Kante zwischen 0 und 1, die x enthält. Sei $e = (x, x_2)$ die eindeutige instabile Kante. Dann gilt für $U := \text{Stab}_{\Gamma_1(N)}(e) = q$ nach Satz 2.37 $\#U = q$. Wie im Beweis von Korollar 2.39 operiert U dann transitiv auf den anderen q Kanten, die x enthalten. Diese fallen in $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{T}$ also zu einer Kante e_1 zusammen. e_1 muss dann stabil sein, da e eindeutig war als instabile Kante zwischen 0 und 1, die x enthält. ■

Zusammengefasst sehen wir, dass die Umkehrung von Satz 2.10 hier gilt. Wir können also direkt am Quotientengraphen ablesen, ob ein Knoten beziehungsweise eine Kante stabil ist oder nicht. Außerdem haben wir gezeigt, dass der stabile Bereich im Quotientengraphen zusammenhängend ist. Da ab der Stufe $n = \deg(N)$ in $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{T}$ nach Satz 1.30 nur noch Spitzenknoten vorkommen, gibt es höchstens bis zur Stufe $n - 1$ stabile Knoten.

2.4.3 $q = 2, \Gamma_0(N)$

Wir haben bereits gesehen, dass es für $q \neq 2$ keine $\Gamma_0(N)$ -stabilen Knoten in \mathcal{T} gibt. Den Fall $q = 2$ müssen wir noch genauer untersuchen. Dazu gehen wir genau wie im Fall der $\Gamma_1(N)$ vor. Das heisst, wir zeigen wieder zuerst ein etwas technisches Lemma, mit dessen Hilfe wir dann Aussagen über das Wachstum von Stabilisatoren und die Struktur des Quotientengraphen ableiten können.

Lemma 2.41 Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_2[T]/N)$.

Sei weiter $\pi : \text{GL}_2(\mathbb{F}_2[T]) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_2[T]/N)$ die natürliche Reduktion und $\bar{\Gamma}$ das Bild von $\Gamma_0(N)$ unter π .

- (a) Sei $i \geq 1$ und sei \bar{G}_i das Bild von $G_i := \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_2[T])}(\Lambda_i)$ unter π . Falls $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i \neq \{1\}$ ist, existiert ein Teiler M_γ von N , so dass $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \deg(x) \leq i \text{ und } M_\gamma \text{ teilt } x \right\}$ ist.
- (b) Sei \bar{G}_0 das Bild von $\text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_2[T])}(\Lambda_0) \cap \text{Stab}_{\text{GL}_2(\mathbb{F}_2[T])}(\Lambda_1)$ unter π . Falls $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_0 \neq \{1\}$ ist, so ist $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}_q \right\}$

BEWEIS: Bis auf den Anfang ist der Beweis identisch zu dem Beweis von Lemma 2.32. Falls $N = p^e \in \mathbb{F}_2[T]$ Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, dann ist $\gamma^{-1}\bar{\Gamma}\gamma \cap \bar{G}_i \neq \{1\}$ genau dann, falls es Matrizen

$$\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\deg(h) \leq i$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \gamma = \gamma \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ gc & gd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ah + b \\ c & ch + d \end{pmatrix}$$

Es folgt $g = 1$ und aus

$$1 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det(\gamma^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \gamma) = eg = e$$

folgt auch $e = 1$. Wir sind jetzt in derselben Situation wie im Beweis von Lemma 2.32, die Aussagen folgen völlig analog. ■

Satz 2.42 Sei $q = 2$ und $x = \gamma\Lambda_i \in X(\mathcal{T})$ ein $\Gamma_0(N)$ -instabiler Knoten der Stufe $i \geq 1$. Sei $x_k := \gamma\Lambda_k$ und sei $x = x_i \rightarrow x_{i+1} \rightarrow x_{i+2} \rightarrow \dots$ der instabile Pfad nach Unendlich. Dann gilt $\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_k) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_{k+1})$ und $\#(\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_{k+1})/\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_k)) = 2$ für alle $k \geq i$.

BEWEIS: Analog zu Satz 2.36 ■

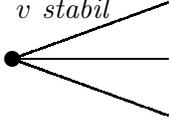
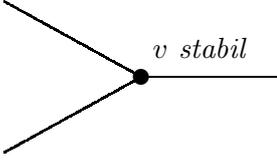
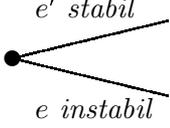
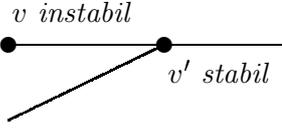
Satz 2.43 Sei $(x_0, x_1) = (\gamma\Lambda_0, \gamma\Lambda_1) =: y \in Y(\mathcal{T})$ eine $\Gamma_0(N)$ -instabile Kante zwischen Knoten der Stufe 0 und 1. Sei $x_k := \gamma\Lambda_k$ und sei $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ der instabile Pfad nach Unendlich. Dann gilt $\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(y) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_2)$ und $\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_i) \subseteq \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_{i+1})$ für $i \geq 2$ und $\#(\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_2)/\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(y)) = 2$ bzw. $\#(\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_{i+1})/\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x_i)) = 2$ für $i \geq 2$.

BEWEIS: Analog zu Satz 2.37 ■

Bemerkung 2.44 Analog zu 2.38 erhalten wir hier ebenfalls einen effektiven Algorithmus, um den Stabilisator einer Kante zu berechnen.

Damit haben wir jetzt wieder die nötigen Hilfsmittel beisammen, um die Knoten in $\Gamma_0(N) \setminus \mathcal{T}$ vollständig zu charakterisieren:

Satz 2.45 In $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{T}$ über \mathbb{F}_2 treten nur die folgenden Typen von Knoten auf:

Stufe 0	Stufe i mit $1 \leq i$
 <p>v stabil</p>	 <p>v stabil</p>
 <p>e' stabil e instabil</p>	 <p>v instabil</p>
 <p>v instabil v' stabil</p>	

BEWEIS: Wir betrachten zunächst wieder die Knoten der Stufe $i \geq 1$. Entweder diese sind stabil, dann besitzen sie nach Satz 2.10 3 Nachbarknoten im Quotientengraph. Im zweiten Fall sei $\gamma\Lambda_i$ ein instabiler Knoten der Stufe $i \geq 1$ und sei $U_i := \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(\gamma\Lambda_i)$ und $U_{i-1} := \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(\gamma\Lambda_{i-1})$ für $i \geq 2$ beziehungsweise $U_0 := \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}((\gamma\Lambda_0, \gamma\Lambda_1))$. Nach Satz 2.42 beziehungsweise Satz 2.43 ist dann $\#U_i/U_{i-1} = 2$, und U_i/U_{i-1} fixiert die Kante $(\gamma\Lambda_i, \gamma\Lambda_{i+1})$ und operiert transitiv auf den anderen beiden Kanten, die $\gamma\Lambda_i$ enthalten. Im Quotientengraph ist $\gamma\Lambda_i$ also ein Spitzenknoten.

Sei nun x ein Knoten der Stufe 0. Falls x stabil ist, so hat x genau 3 Nachbarknoten der Stufe 1. Falls x instabil ist, so ist $U := \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(x)$ konjugiert zu einer echten Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. U hat also entweder 2 oder 3 Elemente.

Im Fall $\#U = 2$ lassen wir U auf den 3 Kanten operieren, die x enthalten. U muss dann mindestens eine der 3 Kanten festlassen. Sei e diese Kante. Diese ist dann instabil, und da nach Satz 2.43 $\#\text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(e) = 2$ ist, ist $U = \text{Stab}_{\Gamma_0(N)}(e)$. Auf den anderen beiden Kanten operiert U dann transitiv, diese fallen also im Quotientengraphen zusammen. Wären diese Kanten instabil, so wären im Quotientengraph beide Nachbarknoten von x der Stufe 1 Spitzenknoten. $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{T}$ wäre also der Graph zu $\Gamma_0(T)\backslash\mathcal{T}$. Für $q = 2$ ist aber $\Gamma_0(T) = \Gamma_1(T)$ und in diesem Fall haben wir schon gesehen, dass eine der beiden Kanten zwischen 0 und 1 stabil ist. In jedem Fall ist also die andere Kante im Quotientengraph stabil.

Im Fall $\#U = 3$ operiert U transitiv auf den 3 Kanten, die x enthalten. Diese 3 Kanten fallen im Quotientengraphen also zusammen, und U ist ein isolierter Knoten. Sei v' der eindeutige Nachbarknoten von x im Quotientengraph. v' ist dann stabil, da ansonsten v' nach obigem bereits ein Spitzenknoten ist, der Quotientengraph würde dann nur aus einer Halbgerade nach Unendlich bestehen, wäre also der Graph $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])\backslash\mathcal{T}$, was ein Widerspruch ist. ■

Wir sehen also, dass auch in diesem Fall der stabile Bereich im Quotientengraphen $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{T}$ zusammenhängend ist und die Umkehrung von Satz 2.10 gilt.

Problematisch ist der Fall der isolierten Knoten der Stufe 0, also der Knoten, die in $\Gamma_0(T) \setminus \mathcal{T}$ genau einen Nachbarknoten der Stufe 1 haben. Im Beweis von Satz 2.45 haben wir gesehen, dass ein notwendiges Kriterium für das Vorkommen von isolierten Knoten ist, dass $\Gamma_0(N)$ 3-Torsion hat. Mit folgender Bemerkung können wir in den meisten Fällen ausschließen, dass isolierte Knoten auftreten:

Bemerkung 2.46 Sei $N = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ eine Zerlegung in Primfaktoren. Ist $\deg(p_i)$ ungerade für ein $i \in \{1, \dots, k\}$, so hat $\Gamma_0(N)$ keine 3-Torsion.

BEWEIS: Es gilt $\Gamma_0(N) \subseteq \Gamma_0(p)$ für alle $p \mid N$. Daher reicht es, die Aussage für $N = p$ mit p irreduzibel zu zeigen. Nach Lemma 2.17 hat $\Gamma_1(p)$ keine 3-Torsion. Aus

$$\Gamma_0(p)/\Gamma_1(p) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{F}_2^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mid \alpha \in (\mathbb{F}_2[T]/p)^* \right\}$$

folgt $\#(\Gamma_0(p)/\Gamma_1(p)) = 2^{\deg(p)} - 1$. Für $k := \deg(p)$ ungerade gilt allerdings $2^k - 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$. Also hat auch $\Gamma_0(p)$ keine 3-Torsion. ■

Für den Fall, dass in der Primfaktorzerlegung von N nur Primteiler mit geradem Grad vorkommen gibt Nonnengardt in [No, Kapitel 4.6], ein Kriterium an, wieviele isolierte Knoten auftreten. Sei $N = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$. Dann enthält $\Gamma_0(N) \setminus \mathcal{T}$ genau 2^{k-1} isolierte Knoten. Der Algorithmus zum Bestimmen einer Basis von $C_{har}(\Gamma_u, k)$, den wir in Abschnitt 2.7 vorstellen werden, funktioniert nur für den Fall, dass wir keine isolierten Knoten haben.

Bemerkung 2.47 Wir haben zwar in Beispiel 2.24 gesehen, dass wegen der p' -Torsion von $\Gamma_0(N)$ zu einem instabilen Knoten nicht unbedingt ein eindeutiges instabiles Ende des Graphen gehört, so dass der Stabilisator des Knotens dieses Ende fixiert. Wir haben nun allerdings gezeigt, dass bis auf isolierte Knoten der Stufe 0 die Stabilisatoren aller Knoten und Kanten p' -torsionsfrei sind, also fixieren sie ein eindeutiges instabiles Ende des Graphen. Da die Kanten an einem isolierten Knoten stabil sind, fixieren also auch für $\Gamma_0(N)$, $q = 2$ alle instabilen Kanten ein eindeutiges instabiles Ende.

2.5 Die Source einer instabilen Kante

Wir haben gesehen, dass in den Fällen $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$, $q = 2$ der Stabilisator jeder instabilen Kante ein eindeutiges Ende des Graphen \mathcal{T} fixiert. Sei im gesamten Abschnitt Γ_u eine dieser Gruppen und bezeichne für e eine Γ_u -instabile Kante $b(e)$ dieses Ende.

Für eine gerichtete Kante $e = v_1 \rightarrow v_2$ schreiben wir $s(e) := v_1$ und $t(e) := v_2$. Wir wollen zeigen, dass der Wert eines harmonischen Kozykels nur von den Werten an den stabilen Kanten abhängt. Dazu definieren wir zu einer instabilen Kante e die Source intuitiv als die Menge derjenigen stabilen Kanten, die am Rand des stabilen Bereichs liegen und so dass e auf dem Pfad von diesen Kanten in Richtung des eindeutigen rationalen Endes von \mathcal{T} liegt. Wir werden dann wie in [Tel] zeigen, dass für eine instabile Kante der Wert eines harmonischen Kozykels eindeutig durch die Werte der Kanten aus der Source bestimmt ist.

Definition 2.48 Sei e eine Γ_u -instabile Kante. Dann sei die Source von e definiert als

$$\text{Src}(e) := \text{Src}_{\Gamma_u}(e) := \{e' \in S_1 \mid \text{Es existiert eine Kante}\}$$

$e'' \in Y_\infty(\mathcal{T})$ mit $s(e'') = t(e')$ und für $w : e'' \rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \rightarrow \dots$
 der eindeutige Pfad von e'' zu einem rationalen Ende gilt $e \in w$

Für eine Γ_u -stabile Kante $e \in S_1$ definieren wir $\text{Src}(e) := \text{Src}_{\Gamma_u}(e) := \{e\}$.

Bemerkung 2.49 Unmittelbar aus der Definition ist klar, dass dann $b(e) = b(e'')$ gilt.

Lemma 2.50 Sei Γ_u eine der Gruppen $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$ oder $\Gamma_0(N)$ (im letzten Fall gelte $q = 2$). Sei $e = (v_1, v_2) \in Y(\mathcal{T}_\infty)$ und sei v_1 der Knoten von e , der weiter von $b(e)$ entfernt ist. Seien e_1, \dots, e_q die Kanten ungleich e , die v_1 enthalten. Dann ist

$$\text{Src}(e) = \coprod_{i=1}^q \text{Src}(e_i)$$

BEWEIS: Die Notationen $t(e)$, $s(e)$ und $b(e)$ seien die aus der Einleitung dieses Kapitels. Sei $\# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e) = q^k$.

Da entlang einer Gerade im instabilen Bereich des Quotientengraphs die Stabilisatoren immer um q -Potenzen wachsen, ist $\# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i) = q^{k-1}$.

Für $k = 1$ sind also die Kanten e_1, \dots, e_q stabil. Es folgt $\text{Src}(e_i) = \{e_i\}$. Die $\text{Src}(e_i)$ bilden also eine disjunkte Vereinigung. Da $t(e_i) = v_1 = s(e)$ sind die stabilen Kanten $e_i \in \text{Src}(e)$. Für eine beliebige Kante $e' \in \text{Src}(e)$ sei e'' die zugehörige Kante in $Y(\mathcal{T}_\infty)$ mit $s(e'') = t(e')$. Dann folgt aus $b(e'') = b(e)$ bereits $e'' = e$, also ist e' eine der Kanten e_i .

Sei $k > 1$. Dann sind die Kanten e_i instabil. Sei $e' \in \text{Src}(e_i)$ und sei e'' die zugehörige instabile Kante mit $s(e'') = t(e')$. Da $b(e) = b(e_i)$ ist und e auf dem Pfad von e_i zum Ende liegt, liegt e auch auf dem Pfad von e'' zum Ende, also ist $e' \in \text{Src}(e)$. Sei umgekehrt $e' \in \text{Src}(e)$. Sei e'' die zugehörige instabile Kante mit $s(e'') = t(e')$ und $b(e'') = b(e)$ und sei $e'' \rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \cdots \rightarrow \varepsilon_k = e \rightarrow \varepsilon_{k+1} \dots$ der eindeutige Pfad zu dem rationalen Ende. Dann muss ε_{k-1} eine der Kanten e_i sein, also liegt e' in genau einer der $\text{Src}(e_i)$. Diese bilden also eine disjunkte Vereinigung und es gilt

$$\text{Src}(e) = \coprod_{i=1}^q \text{Src}(e_i)$$

■

Lemma 2.51 $\text{Src}(e)$ ist endlich. Genauer gilt $\# \text{Src}(e) = \# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e)$.

BEWEIS: Sei $\# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e) = q^k$. Falls $k = 0$ ist, so ist e stabil und $\text{Src}(e) = \{e\}$. Also $\# \text{Src}(e) = 1 = \# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e)$.

Sei $k \geq 1$. Seien e_1, \dots, e_k die Kanten aus Lemma 2.50. Dann gilt $\# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i) = q^{k-1}$. Nach Induktion gilt $\# \text{Src}(e_i) = \# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i) = q^{k-1}$. Nach Lemma 2.50 gilt

$$\text{Src}(e) = \coprod_{i=1}^q \text{Src}(e_i)$$

Es folgt

$$\# \text{Src}(e) = \sum_{i=1}^q \# \text{Src}(e_i) = \sum_{i=1}^q q^{k-1} = q^k = \# \text{Stab}_{\Gamma_u}(e)$$

■

Lemma 2.52 Sei $e \in Y(\mathcal{T}_\infty)$ und $[e]$ das Bild von e in $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$. Dann befindet sich $[e]$ nach dem vorherigen Abschnitt auf einer Halbgerade, die mit einer eindeutigen Klasse stabiler Knoten $[e']$ beginnt. Dabei sei e' so gewählt, dass $t(e')$ in der selben Zusammenhangskomponente von \mathcal{T}_∞ liegt wie e . Dann ist

$$\text{Src}(e) = \text{Stab}_{\Gamma_u}(e) \cdot e' = \{\gamma e' \mid \gamma \in \text{Stab}_{\Gamma_u}(e)\}$$

BEWEIS: Sei $\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(e) = q^k$. Dann gilt nach Lemma 2.51 $\#\text{Src}(e) = q^k$. Da e' stabil ist, gilt auch $\#(\text{Stab}_{\Gamma_u}(e) \cdot e') = q^k$. Nach Definition ist $e' \in \text{Src}(e)$. Sei e'' der zugehörige Knoten in $Y(\mathcal{T}_\infty)$ mit $s(e'') = t(e')$ und $w : e'' \rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \cdots \rightarrow \varepsilon_k = e \rightarrow \dots$ der zugehörige Pfad nach Unendlich. Sei $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma_u}(e)$. Dann ist $\gamma e'$ stabil, $\gamma e''$ instabil mit $s(\gamma e'') = t(\gamma e')$ und γw der eindeutige Pfad von $\gamma e''$ nach Unendlich. Aber γw ist gerade der Pfad $\gamma e'' \rightarrow \gamma \varepsilon_1 \rightarrow \gamma \varepsilon_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \gamma \varepsilon_k = \gamma e = e \rightarrow \dots$. Also liegt e auch auf dem Pfad von $\gamma e''$ nach Unendlich. Nach Definition ist dann $\gamma e' \in \text{Src}(e)$. Also gilt $\text{Stab}_{\Gamma_u}(e) \cdot e' \subseteq \text{Src}(e)$. Da die Mengen gleichmächtig sind, folgt Gleichheit. ■

Lemma 2.53 $\text{Src}(\gamma e) = \gamma \text{Src}(e)$ für alle $\gamma \in \Gamma_u$.

BEWEIS: In $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ gilt $[\gamma e] = [e]$. Sei e' die zu e gewählte Kante aus Lemma 2.52. Dann ist $\gamma e'$ die zu γe gehörende Kante und es gilt

$$\text{Src}(\gamma e) = \text{Stab}_{\Gamma_u}(\gamma e) \cdot \gamma e' = \gamma \text{Stab}_{\Gamma_u}(e) \gamma^{-1} \gamma e' = \gamma \text{Stab}_{\Gamma_u}(e) \cdot e' = \gamma \text{Src}(e)$$

■

Bemerkung 2.54 Lemma 2.52 liefert uns gleichzeitig einen Algorithmus zum Berechnen der Source einer instabilen Kante: Sei $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ bereits berechnet.

Zu $e \in Y(\mathcal{T}_\infty)$ bestimme ein $\gamma \in \Gamma_u$, so dass $e = \gamma \tilde{e}$ ist und \tilde{e} der abgespeicherte Vertreter von $[e] \in \Gamma_u \backslash \mathcal{T}$. Sei \tilde{e} eine Kante zwischen Knoten der Stufe i und $i+1$ und sei $\tilde{e} = \tilde{\gamma}(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$, also \tilde{e} die zu dem Vertreter $\tilde{\gamma}$ gehörende Kante der Stufe $(i, i+1)$. Dann können wir den Stabilisator von \tilde{e} wie in Lemma 2.27 bzw. Algorithmus 2.38 und 2.44 ausrechnen, und mit \tilde{e}' die zu \tilde{e} gehörende stabile Kante ist dann $\text{Src}(\tilde{e}) = \text{Stab}_{\Gamma_u}(\tilde{e})\tilde{e}'$. Folglich ist $\text{Src}(e) = \gamma \text{Src}(\tilde{e}) = \gamma \text{Stab}_{\Gamma_u}(\tilde{e})\tilde{e}'$.

Satz 2.55 (a) Sei c ein Γ_u -equivarianter harmonischer M -wertiger Kozykel und e eine instabile Kante. Dann ist

$$c(e) = \sum_{w \in \text{Src}(e)} c(w)$$

(b) Umgekehrt sei \bar{c} eine Γ_u -equivariante harmonische Abbildung von S_1 nach M , mit S_1 wie in Definition 2.7. Dann wird durch

$$c(e) := \sum_{w \in \text{Src}(e)} \bar{c}(w)$$

ein Γ_u -equivarianter harmonischer M -wertiger Kozykel definiert.

BEWEIS: (a) Sei $e = (v_1, v_2)$ und v_1 der Knoten, der weiter von $b(e)$ entfernt ist und seien e_1, \dots, e_q die anderen q Kanten, die v_1 enthalten. Sei $\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(e) = q^k$. Wir führen einen Beweis über Induktion nach k .

Für $k = 1$ ist $\text{Src}(e) = \{e_1, \dots, e_q\}$. Aus der Harmonizität von c folgt dann

$$\sum_{i=1}^q c(e_i) + c(e^*) = 0$$

Mit $c(e^*) = -c(e)$ folgt dann die Aussage.

Für $k > 1$ ist nach Lemma 2.50

$$\text{Src}(e) = \coprod_{i=1}^q \text{Src}(e_i)$$

Folglich ist

$$\sum_{w \in \text{Src}(e)} c(w) = \sum_{i=1}^q \sum_{w \in \text{Src}(e_i)} c(w)$$

Da $\#\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i) = q^{k-1}$ ist, folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{w \in \text{Src}(e_i)} c(w) = c(e_i)$$

Aus der Harmonizität von c folgt dann

$$c(e) = \sum_{i=1}^q c(e_i) = \sum_{i=1}^q \sum_{w \in \text{Src}(e_i)} c(w) = \sum_{w \in \text{Src}(e)} c(w)$$

(b) Die Wohldefiniertheit von c folgt aus Lemma 2.51 und die Γ_u -Equivarianz von c folgt aus Lemma 2.53. Für die Harmonizität von c seien e und e_1, \dots, e_q wie im Beweis von (a). Dann gilt nach Lemma 2.50

$$c(e) = \sum_{w \in \text{Src}(e)} \bar{c}(w) = \sum_{i=1}^q \sum_{w \in \text{Src}(e_i)} \bar{c}(w) = \sum_{i=1}^q c(e_i)$$

■

2.6 Der Träger eines Kozykels

Wir haben in Satz 2.5 gesehen, dass ein M -wertiger harmonischer Kozykel für eine Kongruenzuntergruppe Γ_u mit Werten in Charakteristik $p = \text{Char}(K_\infty)$ nur auf einem endlichen Teil des Graphen ungleich null ist. In diesem Abschnitt wollen wir die Aussage aus Satz 2.5 in unserem konkreten Fall, also für die Untergruppen $\Gamma(N), \Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$, $q = 2$ und für $M = V(1-k) \otimes (\det)^{2-k}$, präzisieren. Dazu erinnern wir uns kurz an den Beweis von Satz 2.5. Wir haben dort gezeigt, dass für e_1, e_2, \dots eine Folge von Kanten in \mathcal{T} , die zu einer Spitze von Γ_u gehören, es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\#(\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)/\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_{i-1})) = q$ für alle $i \geq n$. Weiterhin bilden die invarianten Unterräume $M_i := \{m \in M \mid \gamma m = m \text{ für alle } \gamma \in \text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)\}$ eine absteigende Kette von Untervektorräumen in M . Für M endlich-dimensional wird diese Kette also irgendwann stationär. Im Beweis von Satz 2.5 haben wir dann gesehen, dass entlang einer Spitze

der Zykel ab der Stufe i verschwindet, sobald die beiden Bedingungen $M_{i-1} = M_i$ und $\#(\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_i)/\text{Stab}_{\Gamma_u}(e_{i-1})) = q$ erfüllt sind. In Abschnitt 2.4 haben wir allerdings gesehen, dass die zweite Bedingung automatisch erfüllt ist, sobald eine Kante instabil wird. Uns kommt es also vor allem auf die erste Bedingung an. Eine oberer Abschätzung für die Grösse des Trägers von harmonischen Kozykeln kriegen wir daher aus der Dimension des Vektorraums M .

Satz 2.56 *Sei M ein r -dimensionaler Vektorraum über einem Körper der Charakteristik $p = \text{Char}(K_\infty)$. Sei $N \in \mathbb{F}_q[T]$ mit $n := \deg(N)$ und sei Γ_u eine der Gruppen $\Gamma(N), \Gamma_1(N)$ oder $\Gamma_0(N)$ mit $q = 2$. Sei c ein M -wertiger Γ_u -equivarianter harmonischer Kozykel. Dann ist $c(e) = 0$ für e eine Kante zwischen Knoten der Stufe i und $i + 1$ mit $i \geq r + n + 1$.*

BEWEIS: Da $\deg(N) = n$ ist, werden Kanten spätestens zwischen Knoten der Stufe n und $n + 1$ instabil. Da $\dim(M) = r$ ist, gilt dann spätestens nach $r + 1$ Schritten $M_{i-1} = M_i$. ■

Da wir an den Kozykeln in $C_{\text{har}}(\Gamma_u, k)$ mit $k \geq 2$ interessiert sind, bietet es sich an dieser Stelle an, kurz die Dimension des Vektorraums $V(1 - k) \otimes (\det)^{2-k}$ auszurechnen:

Bemerkung 2.57 Für $k \geq 2$ ist $\dim V(1 - k) \otimes (\det)^{2-k} = k - 1$.

BEWEIS: Es ist $\dim V(1 - k) \otimes (\det)^{2-k} = \dim V(1 - k)$, da der Twist mit der Determinante nichts an der Dimension des Vektorraums, sondern nur an der Operation der $\text{GL}_2(K_\infty)$ ändert. Weiterhin ist $\dim V(1 - k) = \dim V(-(k - 1)) = \dim V(k - 1)$, da ein endlich-dimensionaler Vektorraum die gleiche Dimension wie sein Dualraum hat. $V(k - 1)$ ist jetzt der Vektorraum der homogenen Polynome in 2 Variablen X und Y vom Grad $k - 2$ über K_∞ . Eine Basis von $V(k - 1)$ sind nun die $k - 1$ Tupel $X^{k-2}Y^0, X^{k-3}Y^1, \dots, X^0Y^{k-2}$. Insgesamt bekommen wir $\dim V(1 - k) \otimes (\det)^{2-k} = k - 1$. ■

2.7 Explizite Beschreibung von $C_{\text{har}}(\Gamma_u, k)$

In diesem Abschnitt sei Γ_u eine der Kongruenzgruppen $\Gamma_1(N)$ oder $\Gamma(N)$. Weiterhin sei der Fall $\Gamma_0(N)$ mit $q = 2$ und $\Gamma_0(N) \setminus \mathcal{T}$ ohne isolierte Knoten zugelassen. Nach Bemerkung 2.46 ist dies äquivalent dazu, dass N einen Primteiler p_i hat mit $\deg(p_i)$ ungerade.

Sei $c \in C_{\text{har}}(\Gamma_u, k)$. Wir haben in Satz 2.55 gezeigt, dass für eine instabile Kante $e \in Y(\mathcal{T})$ gilt

$$c(e) = \sum_{e' \in \text{Src}(e)} c(e').$$

c ist also eindeutig durch die Werte auf dem stabilen Teil $S_1 = Y(\mathcal{T}) - Y(\mathcal{T}_\infty)$ bestimmt. Wegen der Γ_u -Equivarianz ist c festgelegt durch die Werte auf $\Gamma_u \setminus S_1$, dem stabilen Teil des Quotientengraphen. c muss dann lediglich Harmonizität auf $\Gamma_u \setminus S_1$ erfüllen. In Abschnitt 2.4 haben wir die Struktur von $\Gamma_u \setminus S_1$ bereits untersucht. Mit Hilfe der Ergebnisse aus diesem Abschnitt können wir jetzt eine Basis von $C_{\text{har}}(\Gamma_u, k)$ angeben.

Satz 2.58 *Sei $i \geq 1$, $\bar{e} \in \Gamma_u \setminus S_1$ eine Kante zwischen Knoten der Stufe i und $i + 1$ und sei $e \in \pi^{-1}(\bar{e})$. Dann gibt es q Kanten $X = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_q\} \subset \Gamma_u \setminus S_1$ zwischen Knoten der Stufe $i - 1$ und i , so dass $c(e)$ eindeutig durch die Werte auf X bestimmt ist.*

BEWEIS: $c(e)$ ist wegen der Γ_u -Equivarianz eindeutig bestimmt durch den Wert auf \bar{e} . Sei $e = (v_i, v_{i+1})$ mit v_i ein Knoten der Stufe i . Da e stabil ist, hat $\bar{v}_i := \pi(v_i)$ in $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ genau q Kanten ungleich \bar{e} . Diese sind zwischen Knoten der Stufe $i - 1$ und i . Sei $X = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_q\}$ die Menge dieser Knoten. Aufgrund der Harmonizität von c gilt

$$c(\bar{e}^*) + \sum_{i=1}^q c(\bar{e}_i) = 0$$

und folglich

$$c(\bar{e}) = \sum_{i=1}^q c(\bar{e}_i).$$

■

Über Induktion folgt, dass c eindeutig bestimmt ist durch die Werte auf den stabilen Kanten zwischen Knoten der Stufe 0 und 1 in $\Gamma_u \backslash S_1$. c muss Harmonizität auf diesen Knoten erfüllen. Sei \bar{S} die Menge der stabilen Knoten zwischen 0 und 1 in $\Gamma_u \backslash S_1$. Zu jedem stabilen Knoten \bar{v}_0 der Stufe 0 in $\Gamma_u \backslash S_1$ gehören $q+1$ angrenzende Kanten $\bar{S}_{\bar{v}_0} \subset \bar{S}$. Aufgrund der Harmonizität von c gilt dann $\sum_{\bar{e} \in \bar{S}_{\bar{v}_0}} c(\bar{e}^*) = 0$. Weitere Bedingungen an c erhalten wir nicht. Folglich gilt:

Satz 2.59 Sei $k \geq 2$. Sei l'_1 die Anzahl der stabilen Kanten zwischen 0 und 1 und l'_0 die Anzahl der stabilen Knoten der Stufe 0 in $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$. Dann gilt $\dim C_{har}(\Gamma_u, k) = (k-1)(l'_1 - l'_0) = (1-k)\chi(\Gamma_u)$

BEWEIS: Es gibt genau $l'_1 - l'_0$ Kanten, denen wir einen beliebigen Wert in $V(1-k) \otimes \det^{2-k}$ zuordnen können. Nach Bemerkung 2.57 gilt $\dim V(1-k) \otimes \det^{2-k} = k-1$. Also folgt $\dim C_{har}(\Gamma_u, k) = (k-1)(l'_1 - l'_0)$. Die zweite Behauptung folgt aus Satz 2.23 und $l'_1 - l'_0 = l_1 - l_0$. Letzteres gilt, da im Quotientengraphen zu jedem stabilen Knoten der Stufe $i \geq 1$ eine eindeutige stabile Kante zwischen Knoten der Stufen i und $i+1$ gehört.

■

Wir erhalten also eine explizite Basis von $C_{har}(\Gamma_u, k)$ der Form

$$\{(e_i, v_j) \mid i = 1, \dots, -\chi(\Gamma_u), j = 1, \dots, k-1\}$$

mit e_i eine Teilmenge der Kanten zwischen 0 und 1 in $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ und $V(1-k) = \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle_{K_\infty}$.

Bemerkung 2.60 Teitelbaum zeigt in [Te1] mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch die selbe Dimensions-Formel für die Dimension des Raumes $S_k(\Gamma_u)$ der Drinfeldschen Spitzenformen vom Gewicht k zu einer Kongruenzgruppe Γ_u . In Abschnitt 2.8 werden wir einen Isomorphismus zwischen $S_k(\Gamma_u)$ und $C_{har}(\Gamma_u, k)$ kurz skizzieren.

Beispiel 2.61 Sei $k = 4, q = 2$ und $\Gamma_u = \Gamma_1(T^2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \dim C_{har}(\Gamma_u, k) &= (1-4)\chi(\Gamma_1(T^2)) \\ &= 3 * (\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) : \Gamma_1(T^2)) \frac{1}{(2^2-1) * (2-1)} = 3 * 12/3 = 12. \end{aligned}$$

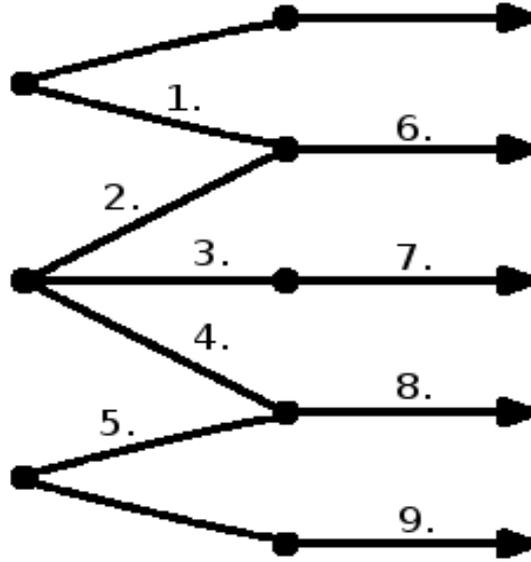
Abbildung 10: Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^2)\backslash\mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

Abbildung 10 zeigt den Quotientengraph von $\Gamma_1(T^2)\backslash\mathcal{T}$. In der Abbildung sind die stabilen Kanten mit den Zahlen 1. bis 5. sowie 6. und 8. markiert. Die Kanten 1., 2., 3., 4. und 5. sind die fünf stabile Kanten zwischen 0 und 1, es gibt einen stabilen Knoten der Stufe 0, der die Kanten 2., 3. und 4. als Nachbarkanten hat. Ein harmonischer Kozykel ist dann dadurch bestimmt, dass wir auf den Kanten 1., 2., 3., und 5. Werte in $V(1-4) \otimes \det^{2-k}$ vorgeben. Sei $\{U^2, U * V, V^2\}$ eine Basis von $V(3)$ und sei $\{(U^2)^*, (U * V)^*, (V^2)^*\}$ die duale Basis in $V(-3) \otimes \det^{2-k}$.

Sei c gegeben durch die folgende Tabelle, in der die zu den Kanten gehörenden Matrizen jeweils mit eingetragen sind.

1.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1)$	$(U^2)^*$
2.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1)$	$(U * V)^*$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1)$	$(V^2)^*$
5.	$\begin{pmatrix} 1 & T+1 \\ T+1 & T^2 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1)$	$(U^2)^*$

$v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \Lambda_0$ ist der einzige stabile Knoten der Stufe 0. Die Kanten 2., 3., und 4. grenzen an diesen stabilen Knoten. Aus

$$0 = \sum_{\bar{e} \in \tilde{S}_{v_0}} c(\bar{e}^*) = - \sum_{\bar{e} \in \tilde{S}_{v_0}} c(\bar{e})$$

folgt dann, dass c an der Kante 4. den Wert $-((U * V)^* + (V^2)^*) = (U * V)^* + (V^2)^*$ annimmt.

An der Kante 6. nimmt c den Wert $(U^2)^* + (U * V)^*$ an und an der Kante 8. den Wert $(U^2)^* + (U * V)^* + (V^2)^*$.

Damit haben wir c vollständig auf den stabilen Bereich von $\Gamma_1(T^2) \setminus \mathcal{T}$ fortgesetzt. Um c an den instabilen Kanten 7. und 9. auszuwerten, müssen wir Stabilisatoren ausrechnen.

Die Kante $\bar{e} = 7.$ ist gegeben durch die Matrizen $\gamma(\Lambda_1, \Lambda_2)$ mit $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$. Aus $\gamma^{-1} = \gamma$ folgt $M_{\gamma^{-1}} = T$, also $\frac{T^2}{\text{ggT}(T^2, M_{\gamma^{-1}})} = T$. Nach 2.38 ist der Stabilisator der Kante $\gamma(\Lambda_1, \Lambda_2)$ also gegeben durch

$$\gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 * T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 * T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \gamma^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^2 + 1 & T \\ T^3 & T^2 + 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und es gilt folglich für den Wert von c an der Kante \bar{e}

$$\begin{aligned} c(\bar{e}) &= \sum_{\hat{e} \in \text{Src}(\bar{e})} c(\hat{e}) = \sum_{\hat{\gamma} \in \text{Stab}(\bar{e})} c(\hat{\gamma} \gamma(\Lambda_0, \Lambda_1)) \\ &= c(\gamma(\Lambda_0, \Lambda_1)) + \begin{pmatrix} T^2 + 1 & T \\ T^3 & T^2 + 1 \end{pmatrix} c(\gamma(\Lambda_0, \Lambda_1)) \\ &= (V^2)^* + \begin{pmatrix} T^2 + 1 & T \\ T^3 & T^2 + 1 \end{pmatrix} (V^2)^* = T^2 * (U^2)^* + (T^4 + 1)(V^2)^*. \end{aligned}$$

Die Kante $\bar{e} = 9.$ ist gegeben durch die Matrizen $\gamma(\Lambda_1, \Lambda_2)$ mit $\gamma = \begin{pmatrix} T + 1 & 1 \\ T^2 & T + 1 \end{pmatrix}$. Es ist $M_{\gamma^{-1}} = T^2$, also $\frac{T^2}{\text{ggT}(T^2, M_{\gamma^{-1}})} = 1$. Der Stabilisator der Kante $\gamma(\Lambda_1, \Lambda_2)$ berechnet sich also zu

$$\begin{aligned} &\gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & T + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \gamma^{-1} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + T^2 + 1 & T^2 + 1 \\ T^4 & T^3 + T^2 + 1 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} T^4 + T^3 + 1 & T^3 + T \\ T^5 & T^4 + T^3 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^4 + T^2 + 1 & T^3 + T^2 + T + 1 \\ T^5 + T^4 & T^4 + T^2 + 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

und mit $e^* = \left(\begin{pmatrix} 1 & T + 1 \\ T + 1 & T^2 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1) \right)^*$ berechnet sich der Wert von c an der Kante \bar{e} zu

$$\begin{aligned} c(\bar{e}) &= \sum_{\hat{e} \in \text{Src}(\bar{e})} c(\hat{e}) = \sum_{\hat{\gamma} \in \text{Stab}(\bar{e})} c(\hat{\gamma} e^*) = \sum_{\hat{\gamma} \in \text{Stab}(\bar{e})} \gamma c(e^*) = \sum_{\hat{\gamma} \in \text{Stab}(\bar{e})} \hat{\gamma} (U^2)^* \\ &= (U^2)^* + (T^6 + T^4 + 1) * (U^2)^* + T^8 * (V^2)^* + (T^8 + T^6 + 1) * (U^2)^* + T^{10} * (V^2)^* \\ &\quad + (T^8 + T^4 + 1) * (U^2)^* + (T^{10} + T^8) * (V^2)^* = (U^2)^*. \end{aligned}$$

2.8 Motivation II

Teitelbaum hat in [Te1] eine Methode vorgestellt, wie man mit Hilfe von harmonischen Γ_u -equivarianten Kozykeln Drinfeldsche Modulformen konstruieren kann. Wir stellen hier nur kurz Teitelbaums Resultat dar. Für Details verweisen wir auf [Te1] beziehungsweise auf [Ge].

Sei \mathcal{K}_∞ die Vervollständigung bezüglich v_∞ vom algebraischen Abschluss von K_∞ und sei $\Omega := \mathcal{K}_\infty - K_\infty$ die Drinfeldsche obere Halbebene. $\text{GL}_2(K_\infty)$ operiert auf Ω via linearer Transformationen.

Definition 2.62 Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{K}_\infty$ heißt Modulform vom Gewicht k für die Gruppe Γ_u , falls:

- (a) Für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_u$ und $z \in \Omega$ gilt $f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z)$.
- (b) f ist holomorph auf Ω .
- (c) f ist holomorph an den Spitzen von Γ_u .

Wir schreiben $\mathcal{M}_k(\Gamma_u)$ für den Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k für Γ_u .

Die Bedingung (c) müssen wir noch genauer erklären. Sei $A \subseteq K$ der Unterring von Funktionen, die ausser an Unendlich keine Polstellen haben. Zu einem gebrochenen Ideal L in A können wir dann Funktionen $e_L(z)$ und $t_L(z)$ definieren als

$$e_L(z) := z \prod_{a \in L \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{a}\right) \text{ und } t_L(z) := e_L(z)^{-1}$$

Sei nun p eine Spitze von Γ_u und sei $\gamma \in \text{GL}_2(K)$ mit $\gamma(\infty) = p$. Sei $U(p) := \text{Stab}_{\Gamma_u}(p)$. Dann fixiert $\gamma^{-1}U(p)\gamma$ die Spitze ∞ , also enthält $\gamma^{-1}U(p)\gamma$ eine maximale Untergruppe linearer Translationen der Form $z \mapsto z + b$ mit $b \in L$ für ein gebrochenes Ideal L von A (zumindest für die hier betrachteten Γ_u). Mit diesem Ideal L definieren wir die zur Spitze p gehörende rigide analytische Funktion $t_{(p, \Gamma_u)}(z) := e_L^{-1}(z)$.

Sei nun p eine Spitze von Γ_u . Wir nennen eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{K}_\infty$ holomorph an p , falls wir eine Entwicklung

$$f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i t_{(p, \Gamma_u)}^i(z)$$

haben.

Definition 2.63 Eine Modulform heißt Spitzenform, falls für alle Spitzen p gilt: In

$$\sum_{i \geq 0} a_i t_{(p, \Gamma_u)}^i(z)$$

ist $a_0 = 0$. Wir schreiben $\mathcal{S}_k(\Gamma_u)$ für den Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht k für Γ_u .

Teitelbaum beweist nun in [Te1, Theorem 16] folgenden Satz:

Satz 2.64 Sei Γ_u eine Kongruenzuntergruppe von $\text{GL}_2(K)$ und sei $k \geq 2$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_u) \longrightarrow C_{\text{har}}(\Gamma_u, k)$$

Wir wollen hier nur kurz skizzieren, wie man von Spitzenformen zu harmonischen Kozykeln kommt. Für Details verweisen wir auf [Te1]. Teitelbaum konstruiert in seiner Arbeit eine Reduktions-Abbildung von Ω nach \mathcal{T} , die mit der $\text{GL}_2(K_\infty)$ -Operation kommutiert. Die Urbilder der Ecken und Kanten bilden einen Atlas von Ω im Sinne der rigiden Geometrie. Mit Hilfe dieser Abbildung kann man zu jeder komplex-wertigen holomorphen 1-Form $f(z)dz$ auf Ω das Residuum $\text{Res}_e f(z)dz$ für eine orientierte Kante e definieren. Zu einer Spitzenform f vom Gewicht k zu einer Untergruppe $\Gamma_u \subset \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ definieren wir dann einen Kozykel $\text{Res}(f)$ vom Gewicht k durch

$$\text{Res}(f)(e)(X^i Y^{k-2-i}) := \text{Res}_e z^i f(z) dz$$

Die Harmonizität von $\text{Res}(f)$ folgt aus dem rigid-analytischen Residuensatz und die Γ_u -Equivarianz von f folgt aus der Modularität von f . Teitelbaum zeigt dann, dass die so erhaltene Abbildung $\mathcal{S}_k(\Gamma_u) \longrightarrow C_{\text{har}}(\Gamma_u, k)$ ein Isomorphismus ist.

2.9 $q \neq 2, \Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)$

Der vorgestellte Algorithmus zum Berechnen von $C_{har}(\Gamma_u, k)$ funktioniert im Fall von $\Gamma_u = \Gamma_0(N)$ und $q \neq 2$ nicht, da es in diesem Fall keine stabile Kanten gibt. In diesem Abschnitt wollen wir kurz einen Ausweg skizzieren. Gelte im gesamten Abschnitt ohne Einschränkung $\text{ggT}(N, T) = 1$. Dem Problem können wir dann ausweichen, indem wir erst $C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T), k)$ berechnen, und dann darin $C_{har}(\Gamma_0(N), k)$ wiederfinden. Die Gruppe $\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)$ ist l' -torsionsfrei als Untergruppe von $\Gamma_1(T)$. Wir werden im Folgenden erklären, wie wir den Graph $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \backslash \mathcal{T}$ berechnen. Danach werden wir die Struktur des Graphen analysieren und zeigen, wie man $C_{har}(\Gamma_0(N), k)$ in $C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T), k)$ wiederfinden kann. Dieser Algorithmus wurde in der Arbeit allerdings nicht implementiert. In vielen Fällen ist $S_k(\Gamma_0(N))$ ohnehin trivial, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.65 Für $q \neq 2$, $N = p$ prim und $q - 1 \nmid k$ ist $\dim S_k(\Gamma_0(N), k) = 0$

BEWEIS: Siehe [Ge][VII.6] ■

Die Bedingung $\text{ggT}(N, T) = 1$ ist in diesem Abschnitt nur eine technische Einschränkung. Falls $\text{ggT}(N, T) \neq 1$ ist, muss man ein anderes Polynom M suchen, mit $\deg(M)$ minimal und $\text{ggT}(N, M) = 1$. Der Trick funktioniert dann genauso mit der Gruppe $\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(M)$, also der Berechnung von $C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(M), k)$.

2.9.1 Bestimmung eines Repräsentantensystems

Um $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \backslash \mathcal{T}$ zu berechnen, brauchen wir zunächst ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)$ in $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Danach können wir dann wie in Satz 1.26 vorgehen.

Lemma 2.66 Es ist

$$(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N) \times \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \{(c, d) \in (\mathbb{F}_q)^2 \setminus (0, 0)\}$$

BEWEIS: Da $\text{ggT}(N, T) = 1$ ist, gilt nach dem Chinesischen Restsatz

$$(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \Gamma_0(N) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \times \Gamma_1(T) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$$

Die Aussage folgt dann aus Korollar 1.23 und Satz 1.25. ■

Durch das Ausweichen auf $\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)$ kommt also ein zusätzlicher Komplexitätsfaktor von q^3 hinzu.

Um mit dem Vertretersystem konkret zu rechnen, erklären wir nun kurz, wie eine Matrix aus $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N) \times \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \{(c, d) \in (\mathbb{F}_q)^2 \setminus (0, 0)\}$ auf kanonische Weise nach $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ geliftet werden kann.

Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $\mathbb{F}_q[T]/(N * T) \cong \mathbb{F}_q[T]/N \times \mathbb{F}_q[T]/T = \mathbb{F}_q[T]/N \times \mathbb{F}_q$. Sei $\psi : \mathbb{F}_q[T]/N \times \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q[T]/(N * T)$ die Umkehrung. ψ kann einfach mittels Chinesischem Restsatz berechnet werden.

Weiterhin haben wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/(N * T)) &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(\begin{pmatrix} a \bmod N & b \bmod N \\ c \bmod N & d \bmod N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \bmod T & b \bmod T \\ c \bmod T & d \bmod T \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

φ^{-1} ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/(N * T)) \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} \psi(a, a') & \psi(b, b') \\ \psi(c, c') & \psi(d, d') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 1.7.1 erklärt, können wir $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/N)$ berechnen und zu Elementen $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$ liften. Ein Tupel $\{(c, d) \in (\mathbb{F}_q)^2 \setminus (0, 0)\}$ können wir auf kanonische Weise zu einer Matrix $\gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ ergänzen. Dann berechnen wir $\gamma'' := \varphi^{-1}(\gamma, \gamma')$ und liften γ'' wie in Satz 1.33 beschrieben zu einem Element $\delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Diese Elemente multiplizieren wir dann noch mit Matrizen aus $\begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Um zu einer gegebenen Matrix $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ eine $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))$ -äquivalente Matrix aus dem eben konstruierten Vertretersystem zu bestimmen, multipliziert man erst mit $\rho := \begin{pmatrix} \det(\gamma)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und erhält eine Matrix $\gamma' := \rho\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Zu γ' bestimmt man, wie im Abschnitt 1.7.1 erklärt, eine $\Gamma_0(N)$ -äquivalente Matrix $\delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$.

Weiterhin nimmt man mit $\gamma' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Einträge $c' := c \bmod T$ und $d' := d \bmod T$, und ergänzt (c', d') auf kanonische Art zu einer Matrix $\delta' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ und berechnet $\delta'' := \varphi^{-1}(\delta, \delta') \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N * T)$. Das Element δ'' liftet man dann nach $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ und multipliziert mit ρ^{-1} . Das Ergebnis ist dann eine zu γ äquivalente Matrix aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$, die zum abgespeicherten Vertretersystem gehört.

2.9.2 Die Struktur des Quotientengraphen

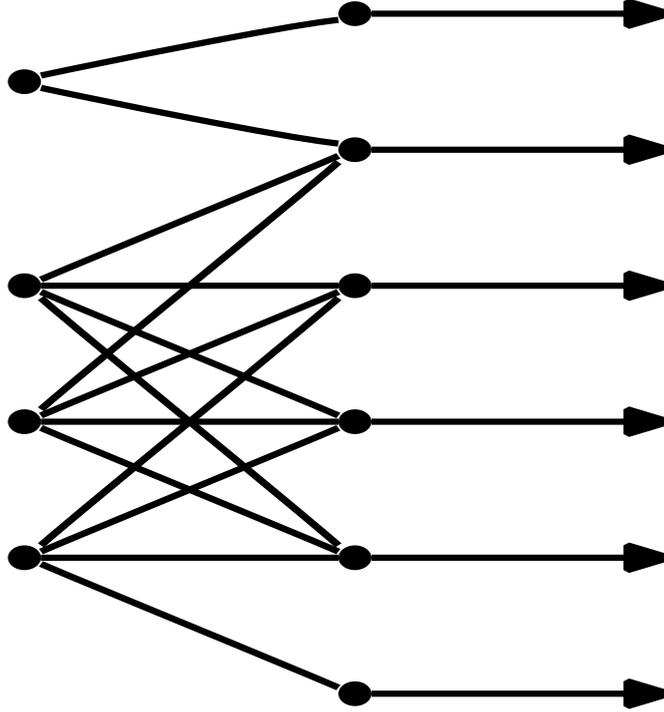
Die Quotientengraphen $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \backslash \mathcal{T}$ unterscheiden sich in ihrer Struktur nicht wesentlich von den Quotientengraphen $\Gamma_1(N) \backslash \mathcal{T}$. Um die vorkommenden Knoten zu charakterisieren, gehen wir ähnlich wie in Abschnitt 2.4.2 vor. Wir untersuchen also erst die Stabilisatoren von Kanten und zeigen, dass für eine instabile Kanten auf dem Pfad nach $b(e)$ die Stabilisatoren regelmässig, um q -Potenzen wachsen. Wie in 2.4.2 erhalten wir dadurch eine komplette Übersicht über den Quotientengraph.

Satz 2.67 (a) Sei $x \in X(\mathcal{T})$ ein $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))$ -instabiler Knoten der Stufe $i \geq 1$ und sei $x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$ der nach Lemma 2.21 eindeutige instabile Pfad nach Unendlich. Dann gilt $\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_i) \subseteq \mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_{i+1})$ und $\#(\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_{i+1}) / \mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_i)) = q$.

(b) Sei $(x_1, x_2) = y \in Y(\mathcal{T})$ eine $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))$ -instabile Kante zwischen Knoten der Stufe 0 und 1 und sei $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$ der nach Lemma 2.21 eindeutige instabile Pfad nach unendlich. Dann gilt $\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(y) \subseteq \mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_2)$ und $\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_i) \subseteq \mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_{i+1})$ für $i \geq 2$ und

$$\#(\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_2) / \mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(y)) = q \text{ bzw.}$$

$$\#(\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_{i+1}) / \mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x_i)) = q \text{ für } i \geq 2.$$

Abbildung 11: Der Quotientengraph von $(\Gamma_0(T^2 + 1) \cap \Gamma_1(T)) \setminus \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_3$

BEWEIS: (a) Sei $x \in X(\mathcal{T})$ ein Knoten der Stufe $i \geq 1$ und sei $\gamma\Lambda_i$ ein Vertreter des Knotens x in $(\Gamma_1(T) \cap \Gamma_0(N)) \setminus \mathcal{T}$. Dann gilt $\text{Stab}_{\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)}(x) = \text{Stab}_{\Gamma_1(T)}(x) \cap \Gamma_0(N)$. Im Beweis von Satz 2.36 haben wir gezeigt, dass zu jedem γ ein Polynom M_γ existiert mit

$$\text{Stab}_{\Gamma_1(T)}(x) = \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f \in \mathbb{F}_q[T], \deg(f) \leq i \text{ und } M_{\gamma^{-1}} \text{ teilt } f \right\} \gamma^{-1}$$

Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und sei f ein Polynom in $\mathbb{F}_q[T]$ mit $\deg(f) \leq i$ und $M_{\gamma^{-1}} \mid f$.

Dann ist

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ (ad - bc)^{-1} c^2 f & \star \end{pmatrix}$$

genau dann in $\Gamma_0(N)$, wenn $c^2 f \equiv 0 \pmod{N}$ gilt. Mit $N' := \frac{N}{\text{ggT}(N, c^2)}$ also genau dann, wenn $f \equiv 0 \pmod{N'}$ ist, also wenn N' das Polynom f teilt.

Also ist

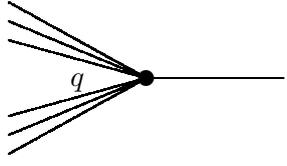
$$\text{Stab}_{\Gamma_1(T)}(\gamma\Lambda_i) \cap \Gamma_0(N) = \gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f \in \mathbb{F}_q[T], \deg(f) \leq i, \text{kgV}(M_{\gamma^{-1}}, N') \text{ teilt } f \right\} \gamma^{-1}$$

Diese Menge wird mit wachsendem i um jeweils q Elemente größer.

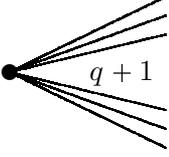
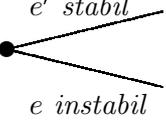
(b) analog zu (a). ■

Genau wie in Abschnitt 2.4.2 folgen daraus die folgenden beiden Korollare:

Korollar 2.68 In $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \setminus \mathcal{T}$ gibt es nur die folgenden beiden Typen von Knoten der Stufe $i \geq 1$:

$x \in X((\Gamma_1(0) \cap \Gamma_1(T)) \setminus \mathcal{T})$ stabil	$x \in X((\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \setminus \mathcal{T})$ instabil
	

Korollar 2.69 In $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \setminus \mathcal{T}$ gibt es nur die folgenden beiden Typen von Knoten der Stufe 0:

$x \in X((\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \setminus \mathcal{T})$ stabil	$x \in X((\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) \setminus \mathcal{T})$ instabil
	

Auch in diesem Fall ist der stabile Bereich im Quotientengraphen also zusammenhängend. Mit $n = \deg(N)$ gibt es nach Satz 1.30 höchstens bis zur Stufe $n - 1$ stabile Knoten. Wir können wieder direkt am Quotientengraph ablesen, ob ein Knoten oder eine Kante stabil ist. Weiterhin gelten die Aussagen aus Abschnitt 2.5 und Abschnitt 2.6 auch für $\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)$.

2.9.3 Berechnung von $C_{har}(\Gamma_0(N), k)$

Nach den Ergebnissen aus dem letzten Abschnitt, sind wir nun in der Lage, $C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T), k)$ zu bestimmen. Das nächste Lemma zeigt dann, wie man daraus $C_{har}(\Gamma_0(N), k)$ bestimmt:

Definition 2.70 Sei $G' \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann bezeichne ${}^G C_{har}(G', k) := \{\varphi \in C_{har}(G', k) \mid \varphi(\gamma e) = \gamma \varphi(e) \text{ für alle } \gamma \in G'\}$ die G -equivarianten Elemente aus $C_{har}(G', k)$.

Lemma 2.71 $C_{har}(\Gamma_0(N), k) = \Gamma_0(N)/(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))$

BEWEIS: Sei $\varphi \in \Gamma_0(N)/(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T), k)$ und sei $\gamma \in \Gamma_0(N)$. Dann gilt $\gamma = \gamma' \gamma''$ mit $\gamma' \in \Gamma_0(N)/(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))$ und $\gamma'' \in \Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)$. Aus der Definition von ${}^{\Gamma_0(N)/(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))} C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T), k)$ und der $(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))$ -Equivarianz von φ folgt dann

$$\varphi(\gamma e) = \varphi(\gamma' \gamma'' e) = \gamma' \varphi(\gamma'' e) = \gamma' \gamma'' \varphi(e) = \gamma \varphi(e)$$

Da φ auch harmonisch ist, gilt also $\varphi \in C_{har}(\Gamma_0(N), k)$.

Umgekehrt sei $\varphi \in C_{har}(\Gamma_0(N), k)$. Dann ist φ natürlich auch in $C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T), k)$ und es gilt für $\gamma \in \Gamma_0(N)/(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T))$ aufgrund der $\Gamma_0(N)$ -Equivarianz von φ auch $\varphi(\gamma e) = \gamma \varphi(e)$. Also ist $\varphi \in \Gamma_0(N)/(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T)) C_{har}(\Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(T), k)$. ■

3 Hecke-Operatoren

In diesem Kapitel definieren wir die Hecke-Operatoren auf harmonischen Kozykeln und liefern einen Algorithmus zum Berechnen einer Darstellungsmatrix der Operatoren bezüglich der Basis aus Kapitel 2.

3.1 Die Operatoren T_p

Sei Γ_u eine der zulässigen Kongruenzuntergruppen aus Abschnitt 2.7 und sei $p \in \mathbb{F}_q[T]$ irreduzibel mit $\text{ggT}(N, p) = 1$. Sei

$$\Gamma^0(p) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b \equiv 0 \pmod{p} \right\}.$$

Unser erstes Ziel ist es, Hecke-Operatoren T_p auf $C_{\text{har}}(\Gamma_u, k)$ zu definieren.

Lemma 3.1 *Wir haben eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \Phi_p : \Gamma_u \cap \Gamma_0(p) &\longrightarrow \Gamma_u \cap \Gamma^0(p) \\ \gamma &\mapsto \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

BEWEIS: Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_u \cap \Gamma_0(p)$.

Da $\gamma \in \Gamma_0(p)$ ist, folgt

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & pb \\ cp^{-1} & d \end{pmatrix} =: \gamma' \in \Gamma^0(p)$$

Da $\text{ggT}(N, p) = 1$ war, ist für $\gamma \in \Gamma_u$ auch $\gamma' \in \Gamma_u$.

Insgesamt ist die Abbildung Φ_p wohldefiniert.

Genauso zeigt man, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma_u \cap \Gamma^0(p) &\longrightarrow \Gamma_u \cap \Gamma_0(p) \\ \gamma &\mapsto \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wohldefiniert ist.

Die beiden Abbildungen sind invers zueinander, also ist Φ_p bijektiv. ■

Lemma 3.2 *Sei $c : Y(\mathcal{T}) \longrightarrow V$ ein harmonischer Kozykel. Dann definiert $\tilde{c}(e) := \gamma c(\delta e)$ einen harmonischen Kozykel $\tilde{c} : Y(\mathcal{T}) \longrightarrow V$.*

BEWEIS: Sei $v \in X(\mathcal{T})$ beliebig und bezeichne $v_\delta := \delta v$. Dann ist

$$\sum_{e \mapsto v} \tilde{c}(e) = \sum_{e \mapsto v} \gamma c(\delta e) = \gamma \sum_{e \mapsto v} c(\delta e) = \gamma \sum_{\hat{e} \mapsto v_\delta} c(\hat{e}) = \gamma 0 = 0.$$

■

Sei nun $c \in C_{har}(\Gamma_u, k)$ gegeben. Sei

$$\pi_2 : (\Gamma_u \cap \Gamma^0(p)) \backslash \mathcal{T} \longrightarrow \Gamma_u \backslash \mathcal{T}$$

die Projektion und sei $\pi_2^* c := c \circ \pi_2$ der Pullback von c bezüglich π_2 . Zu einer Abbildung

$$c : Y(\mathcal{T}) \longrightarrow V \text{ sei } \Phi_p^*(c)(e) := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \right).$$

Weiterhin sei zu $c : Y(\mathcal{T}) \longrightarrow V \in C_{har}(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p), k)$ die Spur von c gegeben durch

$$\text{tr}_{\pi_1}(c)(e) := \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} c(\delta e)$$

für $e \in Y(\mathcal{T})$.

Die Abbildung tr_{π_1} ist Unabhängig von der Wahl des Repräsentantensystems von $(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u$. Seien $\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ und $\{\delta'_1, \dots, \delta'_l\}$ zwei Repräsentantensysteme und gelte $\delta'_i = \gamma_i \delta_i$ mit $\gamma_i \in \Gamma_u \cap \Gamma_0(p)$. Dann gilt mit der $(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p))$ -Equivarianz von c

$$\sum_{i=1}^l (\delta'_i)^{-1} c(\delta'_i e) = \sum_{i=1}^l \delta_i^{-1} \gamma_i^{-1} c(\gamma_i \delta_i e) = \sum_{i=1}^l \delta_i^{-1} c(\delta_i \gamma_i e).$$

Damit können wir jetzt die Hecke-Operatoren T_p definieren:

Definition 3.3 Zu $c \in C_{har}(\Gamma_u, k)$ definiere $T_p c := \text{tr}_{\pi_1} \circ \Phi_p^* \circ \pi_2^*(c)$.

Das folgende Diagramm veranschaulicht die Definition von T_p :

$$\begin{array}{ccc} C_{har}(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p), k) & \xrightarrow{\Phi_p^*} & C_{har}(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p), k) \\ \uparrow \pi_2^* & & \downarrow \text{tr}_{\pi_1} \\ C_{har}(\Gamma_u, k) & & C_{har}(\Gamma_u, k) \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \Phi_p^* \circ \pi_2^*(c) \\ \searrow T_p(c) \\ \nearrow \pi_2^*(c) \\ \searrow c \end{array} \longrightarrow V$$

Satz 3.4 T_p ist wohldefiniert.

BEWEIS: Wir zeigen die Wohldefiniertheit von T_p in 3 Schritten:

1.: Zu zeigen: Für $c \in C_{har}(\Gamma_u, k)$ ist $\pi_2^* c \in C_{har}(\Gamma_u \cap \Gamma^0(p), k)$.

Dass π_2^* die Harmonizität erhält ist unmittelbar klar. Die $\Gamma_u \cap \Gamma^0(p)$ -Equivarianz von π_2^* folgt direkt aus der Γ_u -Equivarianz von c .

2. Zu zeigen: Für $c \in C_{har}(\Gamma_u \cap \Gamma^0(p), k)$ ist $\Phi_p^* c \in C_{har}(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p), k)$.

Die Harmonizität gilt nach Lemma 3.2. Für die $\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)$ -Equivarianz sei $\gamma \in \Gamma_u \cap \Gamma_0(p)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi_p^*(\gamma e) &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma e \right) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c \left(\underbrace{\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\in \Gamma_u \cap \Gamma^0(p) \text{ nach Lemma 3.1}} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \right) \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \right) = \gamma \Phi_p^*(c). \end{aligned}$$

3. Zu zeigen: Für $c \in C_{har}(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p), k)$ ist $\text{tr}_{\pi_1}(c) \in C_{har}(\Gamma_u, k)$.

Die Harmonizität gilt wieder nach Lemma 3.2 und der Tatsache, dass die Summe von harmonischen Kozykeln wieder harmonisch ist. Für die Γ_u -Equivarianz sei $\gamma \in \Gamma_u$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\pi_1}(\gamma e) &= \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} c(\delta \gamma e) = \sum_{\delta \gamma^{-1} \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} (\delta \gamma^{-1})^{-1} c(\delta \gamma^{-1} \gamma e) \\ &= \gamma \sum_{\delta \gamma^{-1} \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} c(\delta e) = \gamma \text{tr}_{\pi_1}(e). \end{aligned}$$

■

Indem wir die Definition 3.3 auswerten, erhalten wir eine geschlossene Formel für T_p .

$$\begin{aligned} T_p c(e) &= \text{tr}_{\pi_1}(\Phi_p^*(\pi_2^*(c)))(e) = \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \Phi_p^*(\pi_2^*(c))(\delta e) \\ &= \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta e\right). \end{aligned}$$

Satz 3.5 T_p ist ein linearer Operator auf dem Vektorraum $C_{har}(\Gamma_u, k)$.

BEWEIS: Seien $c, c' \in C_{har}(\Gamma_u, k), \lambda \in K_\infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_p(c + c')(e) &= \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (c + c')\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta e\right) \\ &= \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta e\right) \\ &+ \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c'\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta e\right) = T_p(c)(e) + T_p(c')(e) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_p(\lambda c)(e) &= \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\lambda c)\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta e\right) \\ &= \lambda \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta e\right) = \lambda T_p(c)(e). \end{aligned}$$

■

3.2 Berechnung von T_p

3.2.1 Berechnung von $(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u$

Da N und p teilerfremd sind, ist für Γ_u eine der Gruppen $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ und $\Gamma(N)$ nach dem Chinesischen Restsatz

$$(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \Gamma_u \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \times \Gamma_0(p) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$$

Wie in Abschnitt 1.7.1 beschrieben berechnen wir $\Gamma_0(p) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T])$ als Teilmenge von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/p)$. Weiterhin berechnen wir wie in den Abschnitten 1.7.1,

1.7.2 und 1.7.3 $\Gamma_u \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ als Teilmenge von $\begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N)$.

Nach dem Chinesischen Restsatz gilt wieder

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/p) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/Np)$$

Mit diesem Isomorphismus gilt dann

$$\begin{aligned} & (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \cong \Gamma_u \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \times \Gamma_0(p) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \\ & \subseteq \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/N) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/p) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/Np). \end{aligned}$$

Die Matrizen aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T]/Np)$ liften wir wie in Abschnitt 1.7.2 beschrieben nach $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ und erhalten insgesamt Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$.

Bezeichne $\psi : \Gamma_u \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T]) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q[T]/p) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ die so erhaltene Abbildung.

Ein Vertretersystem von $(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \mathcal{T}$ ist dann $\psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathbb{F}_q[T]/p\right)$. Auf diese Art haben wir automatisch Vertreter mit Determinante 1 gewählt.

3.2.2 Berechnung der Operatoren

Wir hatten durch Einsetzen der Definition erhalten:

$$\begin{aligned} T_p(c)(e) &= \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta e\right) \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \sum_{\delta \in (\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \backslash \Gamma_u} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} c\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e\right). \end{aligned}$$

Die Berechnung der Operatoren vereinfacht sich also etwas, wenn wir anstelle von $\{\delta \in$

$\Gamma_u \cap \Gamma_0(p) \backslash \Gamma_u\}$ die Mengen $X := \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right\}$ und

$Y := \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right\}$ im Voraus abspeichern.

Da nach Abschnitt 2.7 ein Kozykel eindeutig durch seine Werte auf einem Teil der stabilen Kanten zwischen 0 und 1 bestimmt ist, müssen wir zum Bestimmen einer Darstellungsmatrix von T_p bezüglich der Basis aus 2.7 die Operatoren T_p lediglich auf stabilen Kanten zwischen 0 und 1 berechnen.

Die Aufgabe ist es dann, für eine stabile Kante der Form $e = \gamma(\Lambda_0, \Lambda_1)$ den Wert $T_p(c)(e)$ zu bestimmen. Dazu müssen wir für Matrizen δ' aus Y den Wert $c(\delta' \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma(\Lambda_0, \Lambda_1))$ bestimmen.

Die Aufgabe ist also, zu der Kante $e' = \delta' \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma(\Lambda_0, \Lambda_1)$ die äquivalente abgespeicherte Kante in $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ zu finden.

Dazu betrachten wir die beiden Matrizen

$$A_1 = \delta' \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A_2 = \delta' \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen entsprechen Anfangs- und Endknoten der Kante e' .

Mit Hilfe des Algorithmus aus Satz 1.19 können wir die Matrizen A_i dann schreiben als

$$\gamma_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{k_i} \end{pmatrix} \alpha_i$$

mit $\gamma_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$, $k_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $\alpha_i \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)K_\infty^*$ für $i = 1, 2$.

Da e' eine Kante von \mathcal{T} ist, gilt dann $|k_1 - k_2| = 1$.

Im Fall $k_2 = k_1 + 1 > 2$ entspricht können wir die Kante e' dann in der Form

$$\gamma_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{k_1} \end{pmatrix}, \gamma_1^{-1} \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{k_2} \end{pmatrix} \right)$$

schreiben, wobei $\gamma_1^{-1} \gamma_2 \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_{k_2})$ ist.

Die Kante e' ist dann die Kante $\gamma_1(\Lambda_{k_1}, \Lambda_{k_2})$.

Im Fall $k_1 = k_2 + 1 > 2$ erhalten wir entsprechend die Kante $\gamma_2(\Lambda_{k_1}, \Lambda_{k_2}) = (\gamma_2(\Lambda_{k_2}, \Lambda_{k_1}))^*$.

Im Fall $k_2 = k_1 + 1 = 1$ haben wir das Problem, dass $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_0)$ nicht in $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_1)$ enthalten ist. Stattdessen müssen wir ein $\alpha \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_0) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ suchen mit $\alpha \gamma_1^{-1} \gamma_2 \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])}(\Lambda_1)$ und schreiben dann e' um als

$$\gamma_1 \alpha^{-1} \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{k_1} \end{pmatrix}, \alpha \gamma_1^{-1} \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{k_2} \end{pmatrix} \right)$$

Die Kante e' ist dann die Kante $\gamma_1 \alpha^{-1}(\Lambda_0, \Lambda_1)$.

Im Fall $k_1 = k_2 + 1 = 1$ gehen wir genauso vor und erhalten die Kante $\gamma_2 \alpha^{-1}(\Lambda_1, \Lambda_0) = (\gamma_2 \alpha^{-1}(\Lambda_0, \Lambda_1))^*$.

In allen 4 Fällen haben wir also die Kante e' schreiben können als $\gamma'(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ mit $\gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$. Wir schreiben dann $\gamma' = \gamma'' s'$ mit s' ein Repräsentant aus dem abgespeicherten Repräsentantensystem von $\Gamma_u \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ und $\gamma'' \in \Gamma_u$. Die Kante $s'(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$ ist eine der Kanten aus der Überlagerung der Standardgerade Υ aus Satz 1.26, zu der wir beim Ausrechnen von $\Gamma_u \backslash \mathcal{T}$ eine Γ_u -äquivalente Kante abgespeichert haben.

3.2.3 Beispiel $q = 2, \Gamma_u = \Gamma_1(T), p = T + 1$

Wir wollen kurz das Beispiel $q = 2, \Gamma_u = \Gamma_1(T)$ und $p = T + 1$ angucken. Der Graph $\Gamma_u \cap \setminus \mathcal{T}$ hat genau eine stabile Kante e , die durch $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1)$ gegeben ist.

Es ist

$$(\Gamma_u \cap \Gamma_0(p)) \setminus \Gamma_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 & T \\ T & T+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und folglich

$$X = Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 & T^2+T \\ \frac{T}{T+1} & T+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T}{T+1} & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} T_p(c)(e) &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(c \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1) \right) \right. \\ &+ \begin{pmatrix} T+1 & T^2+T \\ \frac{T}{T+1} & T+1 \end{pmatrix} c \left(\begin{pmatrix} T+1 & T^2+T \\ \frac{T}{T+1} & T+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1) \right) \\ &\left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T}{T+1} & 1 \end{pmatrix} c \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T}{T+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1) \right) \right) \end{aligned}$$

Aus Algorithmus 1.19 erhalten wir für die erste Kante:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_1 \alpha_0$$

und

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 \alpha_1$$

mit $\alpha_0, \alpha_1 \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty) K_\infty^*$.

Also entspricht die erste Kante der Kante

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1) \right)^*.$$

Für die zweite Kante erhalten wir

$$\begin{pmatrix} T+1 & T^2+T \\ \frac{T}{T+1} & T+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_1 \alpha_0$$

und

$$\begin{pmatrix} T+1 & T^2+T \\ \frac{T}{T+1} & T+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_2 \alpha_1.$$

Die zweite Kante entspricht also der Kante

$$\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_1, \Lambda_2).$$

Für die dritte Kante erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T}{T+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 \alpha_0$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T}{T+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda_0 \alpha_1.$$

Die dritte Kante entspricht folglich der Kante

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1) \right)^*.$$

Die dritte Kante ist die stabile Kante e mit umgedrehter Orientierung. Die ersten beiden Kanten sind die beiden instabilen Nachbarkanten von e . Daher haben die Kanten jeweils einen 2-elementigen Stabilisator und es gilt

$$c\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\Lambda_0, \Lambda_1)\right) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c(e) - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c(e)$$

und

$$c\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Lambda_1, \Lambda_2)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c(e) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} c(e).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} T_p(c)(e) &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(c(e) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c(e) + \begin{pmatrix} T+1 & 0 \\ \frac{T}{T+1} & \frac{1}{T+1} \end{pmatrix} c(e) \right) \\ &\quad + \begin{pmatrix} T+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T+1} \end{pmatrix} c(e) - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{T}{T+1} & \frac{1}{T+1} \end{pmatrix} c(e) \end{aligned}$$

3.3 Berechnung von Hecke-Eigenwerten

Wir haben in Abschnitt 2.7 eine Basis von $C_{har}(\Gamma_u, k)$ explizit angegeben. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 können wir jetzt die Darstellungsmatrix von T_p bezüglich dieser Basis sowie die Eigenwerte von T_p berechnen.

Dazu bestimmen wir wie in 2.7 beschrieben eine Teilmenge $X = \{e_i \mid i = 1, \dots, -\chi(\Gamma_u)\}$ der Kanten zwischen 0 und 1 von $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$, durch die ein Kozykel eindeutig bestimmt ist. Es ist dann $\dim C_{har}(\Gamma_u, k) = (k-1)m$ mit $m = \#X$. Sei $V(1-k) = \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle_{K_\infty}$ und \mathcal{B} die Basis

$$\{(e_i, v_j) \mid e_i \in X, j = 1, \dots, k-1\}$$

Wir wollen $M_{T_p} := \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T_p)$ berechnen.

M_{T_p} ist eine $(k-1) * m \times (k-1) * m$ -Matrix. Für die ersten $(k-1)$ Zeilen initialisieren wir e_1 mit dem Wert $v_j, j = 1, \dots, k-1$ und alle anderen $e_i \neq e_1$ mit dem Wert 0. Dadurch erhalten wir ein Kozykel $c \in C_{har}(\Gamma_u, k)$. Dann berechnen wir wie in 3.2 beschrieben $T_p c(e_1) = \lambda_{1,1} v_1 + \dots + \lambda_{1,k-1} v_{k-1}$ und schreiben die Koeffizienten $\lambda_{1,h}$ in die ersten $k-1$ Stellen der Zeile j . Danach berechnen wir $T_p c(e_2) = \lambda_{2,1} v_1 + \dots + \lambda_{2,k-1} v_{k-1}$ und schreiben die Koeffizienten $\lambda_{2,h}$ in die nächsten $k-1$ Stellen der Zeile j . Die Zeile j ist also insgesamt von der Form

$$(\lambda_{1,1} \quad \dots \quad \lambda_{1,k-1} \quad \lambda_{2,1} \quad \dots \quad \lambda_{2,k-1} \quad \dots \quad \lambda_{m,k-1})$$

Für die nächsten $(k-1)$ Zeilen initialisieren wir e_2 mit dem Wert $v_j, j = 1, \dots, k-1$ und alle anderen $e_i \neq e_2$ mit dem Wert 0 und berechnen die Zeilen $(k-1) + j$ analog.

Allgemein berechnen wir die $l * (k - 1) + j$ -te Zeile, indem wir die Kante e_l mit dem Wert v_j initialisieren und alle $e_i \neq e_j$ mit dem Wert 0 initialisieren. Insgesamt erhalten wir eine $(k - 1) * m \times (k - 1) * m$ -Matrix, die die Darstellungs-Matrix von M_{T_p} bezüglich der Basis \mathcal{B} ist.

Beispiel 3.6 Wir wollen das Beispiel aus 3.2.3 nochmal angucken. Mit der dort angegebenen Formel für $T_p(c)(e)$ ergibt sich für $k = 3$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten 1 und $T + 1$ und für $k = 4$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten 1 mit Vielfachheit 2 und $T + 1$.

Für $k = 5$ erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & T^2 & T & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 \\ 0 & T^2 & 1 & 0 \\ 0 & T^3 & T^3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten 1 mit Vielfachheit 2 und dem Eigenwert $1 + T^{\frac{3}{2}}$ mit geometrischer Vielfachheit 1 und algebraischer Vielfachheit 2. Der Operator ist also nicht diagonalisierbar.

Diese Eigenwerte entsprechen denjenigen aus [Li], die die Hecke-Operatoren für die Gruppe $\Gamma_1(T)$ dort auf eine andere Art explizit ausgerechnet haben.

A Tabellen für $\Gamma_1(N)$

In diesem Abschnitt wollen wir beispielhaft für kleine q und einige Polynome N und p Tabellen mit Eigenwerten der Operatoren T_p auf $C_{har}(\Gamma_1(N), k)$ angeben. Die Tabellen sind aufsteigend nach Gewicht geordnet und listen jeweils die Euler-Poincare-Charakteristik von $\Gamma_1(N)$, die Dimension von $C_{har}(\Gamma_1(N), k)$ und die invarianten Faktoren von T_p in $\mathbb{F}_q(T)[X]$ mit ihrer jeweiligen Vielfachheit.

$q = 2$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 1, 1)$
	3	2	$(X + 1, 2)$
	4	3	$(X + 1, 2); (X + T + 1, 1)$
	5	4	$(X + 1, 2); (X^2 + T^3 + 1, 1)$
	6	5	$(X + 1, 2); (X + T^2 + 1, 1); (X + T + 1, 2)$
	7	6	$(X + 1, 2); (X + T^2 + 1, 2); (X^2 + T^5 + 1, 1)$
	8	7	$(X + 1, 2); (X + T^3 + T^2 + T + 1, 1); ((X + T^3 + 1)^2, 1); (X + T + 1, 2)$
	9	8	$(X + 1, 2); (X^2 + T^6 + T^5 + T^3 + 1, 2); (X^2 + T^7 + 1, 1)$
	10	9	$(X + 1, 2); (X + T^4 + 1, 1); (X + T^2 + 1, 2); ((X + T^4 + T^3 + T + 1)^2, 1); (X + T + 1, 2)$

$q = 2$	$N = T$	$p = T^2 + T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 1, 1)$
	3	2	$(X + 1, 2)$
	4	3	$(X + 1, 2); (X + T^2 + T + 1, 1)$
	5	4	$(X + 1, 2); (X^2 + T^6 + T^3 + 1, 1)$
	6	5	$(X + 1, 2); (X + T^2 + T + 1, 2); (X + T^4 + T^2 + 1, 1)$
	7	6	$((X + 1)^2, 1); (X + T^4 + T^2 + 1, 2); (X^2 + T^{10} + T^5 + 1, 1)$
	8	7	$((X + 1)^2, 1); (X + T^2 + T + 1, 2); ((X + T^6 + T^3 + 1)^2, 1); (X + T^6 + T^5 + T^3 + T + 1, 1)$
	9	8	$(X + 1, 1); (X^2 + T^{12} + T^{10} + T^5 + T^3 + 1, 1); (X^5 + X^4 + (T^{14} + T^{12} + T^{10} + T^7 + T^5 + T^3) * X^3 + (T^{23} + T^{18} + T^{15} + T^{12} + T^{10} + T^7 + T^5 + T^3) * X^2 + (T^{30} + T^{29} + T^{28} + T^{25} + T^{24} + T^{21} + T^{20} + T^{16} + T^{15} + T^{14} + T^{13} + T^{12} + T^{11} + T^7 + T^5 + T^3 + 1) * X + T^{36} + T^{35} + T^{33} + T^{31} + T^{30} + T^{25} + T^{24} + T^{23} + T^{22} + T^{20} + T^{19} + T^{18} + T^{17} + T^{16} + T^{15} + T^{14} + T^{13} + T^{12} + T^{11} + T^7 + T^5 + T^3 + 1, 1)$
	10	9	$(X + 1, 2); (X + T^4 + T^2 + 1, 2); ((X + T^2 + T + 1)^2, 1); (X + T^8 + T^4 + 1, 1); ((X + T^8 + T^7 + T^6 + T^5 + T^4 + T^3 + T^2 + T + 1)^2, 1)$

$q = 3$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 2, 1)$
	3	2	$(X + 2, 2)$
	4	3	$(X + 2, 2); (X + T + 2, 1)$
	5	4	$(X + 2, 2); (X + 2 * T + 2, 2)$
	6	5	$(X + 2, 2); (X + T^2 + 2, 1); (X + 2 * T^2 + 2, 1); (X + 2 * T^2 + T + 2, 1)$
	7	6	$(X + 2, 2); (X^2 + (T + 1) * X + T^4 + 2 * T + 1, 2)$
	8	7	$(X + 2, 2); (X + 2 * T + 2, 2); (X + T^3 + 2, 1); (X + T^3 + T^2 + 2 * T + 2, 1); (X + 2 * T^3 + 2 * T^2 + 2 * T + 2, 1)$
	9	8	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^2 + T + 2, 2); (X^2 + (T^3 + 1) * X + T^4 + 2 * T^3 + 1, 2)$
	10	9	$(X + 2, 2); (X + T^3 + T + 2, 2); (X + T^4 + 2, 2); (X + 2 * T^4 + 2, 1); (X + 2 * T^4 + T + 2, 1); (X + 2 * T^4 + T^3 + 2, 1)$

$q = 3$	$N = T$	$p = T + 2$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 2, 1)$
	3	2	$(X + 2, 1); (X + 1, 1)$
	4	3	$(X + 2, 2); (X + T + 1, 1)$
	5	4	$(X + 2, 1); (X + 1, 1); (X + T + 2, 1); (X + 2 * T + 1, 1)$
	6	5	$(X + 2, 2); (X + T^2 + 1, 1); (X + 2 * T^2 + 1, 1); (X + 2 * T^2 + 2 * T + 1, 1)$
	7	6	$(X + 2, 1); (X + 1, 1); (X^2 + (T + 2) * X + T^4 + T + 1, 1); (X^2 + (2 * T + 1) * X + T^4 + T + 1, 1)$
	8	7	$(X + 2, 2); (X + 2 * T + 1, 2); (X + T^3 + 1, 1); (X + T^3 + 2 * T^2 + T + 2, 1); (X + 2 * T^3 + T^2 + T + 2, 1)$
	9	8	$(X + 2, 1); (X + 1, 1); (X + T^2 + T + 1, 1); (X + 2 * T^2 + 2 * T + 2, 1); (X^2 + (T^3 + 2) * X + T^4 + T^3 + 1, 1); (X^2 + (2 * T^3 + 1) * X + T^4 + T^3 + 1, 1)$
	10	9	$(X + 2, 2); (X + T^3 + T + 1, 2); (X + T^4 + 1, 1); (X + T^4 + 2, 1); (X + 2 * T^4 + 1, 1); (X + 2 * T^4 + 2 * T + 2, 1); (X + 2 * T^4 + 2 * T^3 + 2, 1)$

$q = 3$	$N = T$	$p = T^2 + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 2, 1)$
	3	2	$(X + 2, 2)$
	4	3	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^2 + 2, 1)$
	5	4	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^2 + 2, 2)$
	6	5	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^4 + 2, 2); (X + 2 * T^4 + T^2 + 2, 1);$
	7	6	$(X + 2, 2); (X^2 + (2 * T^4 + 2 * T^2 + 1) * X + T^8 + T^4 + T^2 + 1, 2)$
	8	7	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^2 + 2, 2); (X + 2 * T^6 + 2 * T^4 + 2 * T^2 + 2, 2); (X + 2 * T^6 + 2, 1)$
	9	8	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^4 + T^2 + 2, 2); (X^2 + (2 * T^6 + 2 * T^4 + 1) * X + T^8 + T^6 + T^4 + 1, 2)$
	10	9	$((X + 2)^2, 1); (X + 2 * T^6 + T^4 + 2 * T^2 + 2, 2); (X + 2 * T^8 + 2, 2); (X + 2 * T^8 + T^4 + 2, 1); (X + 2 * T^8 + 2 * T^4 + 2 * T^2 + 2, 1); (X + 2 * T^8 + 2 * T^6 + 2 * T^4 + 2, 1)$

$q = 3$	$N = T$	$p = T^2 + T + 2$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 2, 1)$
	3	2	$(X + 2, 1); (X + 1, 1)$
	4	3	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^2 + T + 1, 1)$
	5	4	$(X + 2, 1); (X + 1, 1); (X + T^2 + T + 2, 1); (X + 2 * T^2 + 2 * T + 1, 1)$
	6	5	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^4 + T^2 + 1, 2); (X + 2 * T^4 + 2 * T^2 + 1, 2); (X + 2 * T^4 + T^3 + T^2 + 2 * T + 2, 1);$
	7	6	$(X + 2, 1); (X + 1, 1); (X^2 + (T^4 + T^2 + 2 * T + 1) * X + T^8 + 2 * T^5 + 2 * T^2 + T + 1, 1); (X^2 + (2 * T^4 + 2 * T^2 + T + 2) * X + T^8 + 2 * T^5 + 2 * T^2 + T + 1, 1)$
	8	7	$(X + 2, 2); (X + 2 * T^2 + 2 * T + 1, 2); (X + 2 * T^6 + T^3 + 1, 1); (X + 2 * T^6 + 2 * T^5 + 2 * T^3 + 2 * T^2 + T + 2, 1); (X + 2 * T^6 + 2 * T^5 + 2 * T^4 + T^3 + T + 2, 1)$
	9	8	$(X + 2, 1); (X + 1, 1); (X + T^4 + 2 * T^3 + 2 * T^2 + T + 1, 1); (X + 2 * T^4 + T^3 + T^2 + 2 * T + 2, 1); (X^2 + (T^6 + T^4 + 2 * T^3 + 1) * X + T^8 + 2 * T^7 + 2 * T^6 + T^3 + 1, 1); (X^2 + (2 * T^6 + 2 * T^4 + T^3 + 2) * X + T^8 + 2 * T^7 + 2 * T^6 + T^3 + 1, 1)$
	10	9	$((X + 2)^2, 1); (X + 2 * T^6 + T^4 + T^3 + 2 * T^2 + T + 1, 2); (X + 2 * T^8 + 2, 1); (X + 2 * T^8 + T^4 + 1, 1); (X + 2 * T^8 + 2 * T^4 + 1, 1); (X + 2 * T^8 + T^5 + T^2 + 2 * T + 2, 1); (X + 2 * T^8 + T^7 + T^6 + 2 * T^3 + 2, 1)$

$q = 4$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 1, 1)$
	3	2	$(X + 1, 2)$
	4	3	$(X + 1, 2); (X + T + 1, 1)$
	5	4	$(X + 1, 4)$
	6	5	$(X + 1, 2); (X + T + 1, 2); (X + T^2 + 1, 1)$
	7	6	$(X + 1, 2); (X + T^2 + 1, 2); (X^2 + T^5 + 1, 1)$
	8	7	$(X + 1, 4); (X + T + 1, 2); (X + T^3 + T^2 + T + 1, 1)$
	9	8	$(X + 1, 2); (X^2 + T^5 + 1, 2); (X^2 + T^7 + 1, 1)$
	10	9	$(X + 1, 2); (X + T + 1, 4); (X + T^2 + 1, 2); (X + T^4 + 1, 1)$

$q = 5$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 4, 1)$
	3	2	$(X + 4, 2)$
	4	3	$(X + 4, 2); (X + T + 4, 1)$
	5	4	$(X + 4, 2); (X + 2 * T + 4, 2)$
	6	5	$(X + 4, 2); (X + 3 * T + 4, 2); (X + 4 * T^2 + 4 * T + 4, 1)$
	7	6	$(X + 4, 2); (X + 4 * T + 4, 2); (X + 2 * T^2 + T + 4, 2)$
	8	7	$(X + 4, 2); (X + 4 * T^2 + 3 * T + 4, 2); (X + T^3 + 4, 1); (X + T^3 + T^2 + 4 * T + 4, 1); (X + 4 * T^3 + 4, 1)$
	9	8	$(X + 4, 2); (X + 4 * T^3 + 2 * T^2 + 2 * T + 4, 2); (X^2 + (T + 3) * X + 3 * T^6 + 4 * T + 1, 2)$
	10	9	$(X + 4, 2); (X^2 + (2 * T + 3) * X + 2 * T^6 + 3 * T + 1, 2); (X + T^4 + 3 * T^3 + 2 * T + 4, 1); (X + 4 * T^4 + T^3 + 4 * T^2 + T + 4, 1); (X + 4 * T^4 + 2 * T^3 + 2 * T + 4, 1)$

$q = 7$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -1$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	1	$(X + 6, 1)$
	3	2	$(X + 6, 2)$
	4	3	$(X + 6, 2); (X + T + 6, 1)$
	5	4	$(X + 6, 2); (X + 2 * T + 6, 2)$
	6	5	$(X + 6, 2); (X + 3 * T + 6, 2); (X + 6 * T^2 + 4 * T + 6, 1)$
	7	6	$(X + 6, 2); (X + 4 * T + 6, 2); (X + 4 * T^2 + 6 * T + 6, 2)$
	8	7	$(X + 6, 2); (X + 5 * T + 6, 2); (X + T^2 + T + 6, 1); (X + T^3 + 5 * T^2 + 2 * T + 6, 1)$
	9	8	$(X + 6, 2); (X + 6 * T + 6, 2); (X + 4 * T^2 + 3 * T + 6, 2); (X + 4 * T^3 + 3 * T^2 + 5 * T + 6, 2)$
	10	9	$(X + 6, 2); (X + 6 * T^2 + 5 * T + 6, 2); (X + 3 * T^3 + 5 * T^2 + T + 6, 2); (X + T^4 + 6, 1); (X + 6 * T^4 + 6, 1); (X + 6 * T^4 + 2 * T^3 + 6 * T^2 + 2 * T + 6, 1)$

$q = 2$	$N = T^2$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -4$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	4	$(X + 1, 2); (X, 2)$
	3	8	$(X + 1, 2); (X^6 + X^5 + T * X^4 + (T^5 + T^4 + T^2 + 1) * X^3 + (T^6 + T^5 + T^3 + 1) * X^2 + (T^5 + T^4 + T^3) * X + T^4 + T, 1)$
	4	12	$(X + 1, 2); (X + T + 1, 2); (X^8 + (T^7 + T^6 + T^5 + T) * X^6 + (T^{10} + T^9 + T^5 + T^4 + T^2) * X^5 + (T^{12} + T^8 + T^7 + T^6 + T^5 + T^4 + T^3 + T^2) * X^4 + (T^{13} + T^7 + T^6 + T^5 + T^4 + T + 1) * X^3 + (T^{15} + T^{14} + T^{11} + T^3 + T^2 + T + 1) * X^2 + (T^{15} + T^{13} + T^{12} + T^{11} + T^{10} + T^5 + T^2 + 1) * X + T^{12} + T^{11} + T^{10} + T^8 + T^5 + T^4 + T^3 + T, 1)$

$q = 2$	$N = T * (T + 1)$	$p = T^2 + T + 1$	$\chi(\Gamma_1(T)) = -3$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	3	$(X + 1, 2); (X, 1)$
	3	6	$(X + 1, 1); (X, 1); (X^4 + (T^3 + T) * X^3 + (T^4 + T^2) * X + T^5 + T + 1, 1)$
	4	3	$(X + T^2 + T + 1, 2); (X + 1, 1); (X, 1); (X^5 + (T^6 + T^3 + 1) * X^4 + (T^8 + T^7 + T^5 + T^3 + T^2 + T) * X^3 + (T^6 + T^5 + T^4 + T) * X^2 + (T^7 + T^6 + T^5 + T^4 + T^3 + T + 1) * X + T^{10} + T^5 + T^4 + T^3 + T^2 + T + 1, 1)$

B Tabellen für $\Gamma(N)$

In diesem Abschnitt wollen wir beispielhaft für kleine q und einige Polynome N und p Tabellen mit Eigenwerten der Operatoren T_p auf $C_{har}(\Gamma(N), k)$ angeben. Es gelten die selben Konventionen wie in Anhang A.

$q = 2$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma(T)) = -2$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	2	$(X + 1, 2)$
	3	4	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1)$
	4	6	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X + T + 1, 2)$
	5	8	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X^2 + T^3 + 1, 2)$
	6	10	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X + T + 1, 2); ((X + T + 1)^2, 1); (X + T^2 + 1, 2)$
	7	12	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X + T^2 + 1, 2); ((X + T^2 + 1)^2, 1); (X^2 + T^5 + 1, 2)$
	8	14	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X + T + 1, 2); ((X + T + 1)^2, 1); ((X + T^3 + 1)^2, 2); (X + T^3 + T^2 + T + 1, 2)$
	9	16	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X^2 + T^6 + T^5 + T^3 + 1, 4); (X^2 + T^7 + 1, 2)$
	10	18	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X + T + 1, 2); ((X + T + 1)^2, 1); (X + T^2 + 1, 2); ((X + T^2 + 1)^2, 1); (X + T^4 + 1, 2); ((X + T^4 + T^3 + T + 1)^2, 2)$

$q = 2$	$N = T$	$p = T^2 + T + 1$	$\chi(\Gamma(T)) = -2$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	2	$(X + 1, 2)$
	3	4	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1)$
	4	6	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X + T^2 + T + 1, 2)$
	5	8	$(X + 1, 2); ((X^3 + (T^5 + T^4 + 1) * X^2 + (T^7 + T^6 + T^5 + T^3 + 1) * X + T^{11} + T^{10} + T^8 + T^6 + T^4 + T^3 + 1)^2, 1)$
	6	10	$(X + 1, 2); ((X + 1)^2, 1); (X + T^2 + T + 1, 2); ((X + T^2 + T + 1)^2, 1); (X + T^4 + T^2 + 1, 2)$
	7	12	$(X + 1, 2); (X + T^4 + T^2 + 1, 2); ((X + T^2 + 1)^2, 1); ((X^3 + (T^9 + T^6 + 1) * X^2 + (T^{13} + T^{10} + T^7 + T^5 + 1) * X + T^{19} + T^{16} + T^{14} + T^{13} + T^{11} + T^{10} + T^9 + T^7 + T^6 + T^5 + 1)^2, 1)$
	8	14	$(X + 1, 2); (X + T^2 + T + 1, 2); ((X + T^2 + T + 1)^2, 1); (X + T^6 + T^5 + T^3 + T + 1, 2); ((X^3 + (T^{10} + T^8 + 1) * X^2 + (T^{14} + T^{12} + T^{10} + T^6 + 1) * X + T^{22} + T^{20} + T^{16} + T^{12} + T^8 + T^6 + 1)^2, 1)$

$q = 3$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma(T)) = -3$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	3	$(X + 2, 3)$
	3	6	$(X + 2, 2); ((X + 2)^2, 2)$
	4	9	$(X + 2, 4); ((X + 2)^2, 1); (X + T + 2, 3)$
	5	12	$(X + 2, 2); ((X + 2)^2, 2); (X + 2 * T + 2, 2); ((X + 2 * T + 2)^2, 2)$
	6	15	$(X + 2, 4); ((X + 2)^2, 1); (X + T^2 + 2, 3); (X + 2 * T^2 + 2, 3); (X + 2 * T^2 + T + 2, 3)$
	7	18	$(X + 2, 2); ((X + 2)^2, 2); (X^2 + (T + 1) * X + T^4 + 2 * T + 1, 2); ((X^2 + (T + 1) * X + T^4 + 2 * T + 1)^2, 2)$
	8	21	$(X + 2, 4); ((X + 2)^2, 1); (X + 2 * T + 2, 4); ((X + 2 * T + 2)^2, 1); (X + T^3 + 2, 3); (X + T^3 + T^2 + 2 * T + 2, 3); (X + 2 * T^3 + 2 * T^2 + 2 * T + 2, 3)$
	9	24	$(X + 2, 2); ((X + 2)^2, 2); (X + 2 * T^2 + T + 2, 2); ((X + 2 * T^2 + T + 2)^2, 2); (X^2 + (T^3 + 1) * X + T^4 + 2 * T^3 + 1, 2); ((X^2 + (T^3 + 1) * X + T^4 + 2 * T^3 + 1)^2, 2);$
	10	27	$(X + 2, 4); ((X + 2)^2, 1); (X + T^4 + 2, 6); (X + T^3 + T + 2, 4); ((X + T^3 + T + 2)^2, 1); (X + 2 * T^4 + 2, 3); (X + 2 * T^4 + T + 2, 1); (X + 2 * T^4 + T^3 + 2, 1)$

$q = 4$	$N = T$	$p = T + 1$	$\chi(\Gamma(T)) = -4$
	k	$\dim C_{har}(\Gamma_1(T))$	Invariante Faktoren von T_p mit Vielfachheit
	2	4	$(X + 1, 4)$
	3	8	$(X + 1, 4); ((X + 1)^2, 2)$
	4	12	$(X + 1, 4); ((X + 1)^2, 2); (X + T + 1, 4)$
	5	16	$(X + 1, 6); ((X + 1)^2, 5);$
	6	20	$(X + 1, 4); ((X + 1)^2, 2); (X + T + 1, 4); ((X + T + 1)^2, 2); (X + T^2 + 1, 4)$
	7	24	$(X + 1, 4); ((X + 1)^2, 2); (X + T^2 + 1, 4); ((X + T^2 + 1)^2, 2); (X^2 + T^5 + 1, 4)$
	8	28	$(X + 1, 4); ((X + 1)^2, 6); (X + T + 1, 4); ((X + T + 1)^2, 2); (X + T^3 + T^2 + T + 1, 4)$
	9	32	$(X + 1, 4); ((X + 1)^2, 2); (X^2 + T^5 + 1, 8); (X^2 + T^7 + 1, 4)$
	10	36	$(X + 1, 4); ((X + 1)^2, 2); (X + T + 1, 4); ((X + T + 1)^2, 6); (X + T^2 + 1, 4); ((X + T^2 + 1)^2, 2); (X + T^4 + 1, 2); (X + T^4 + 1, 4)$

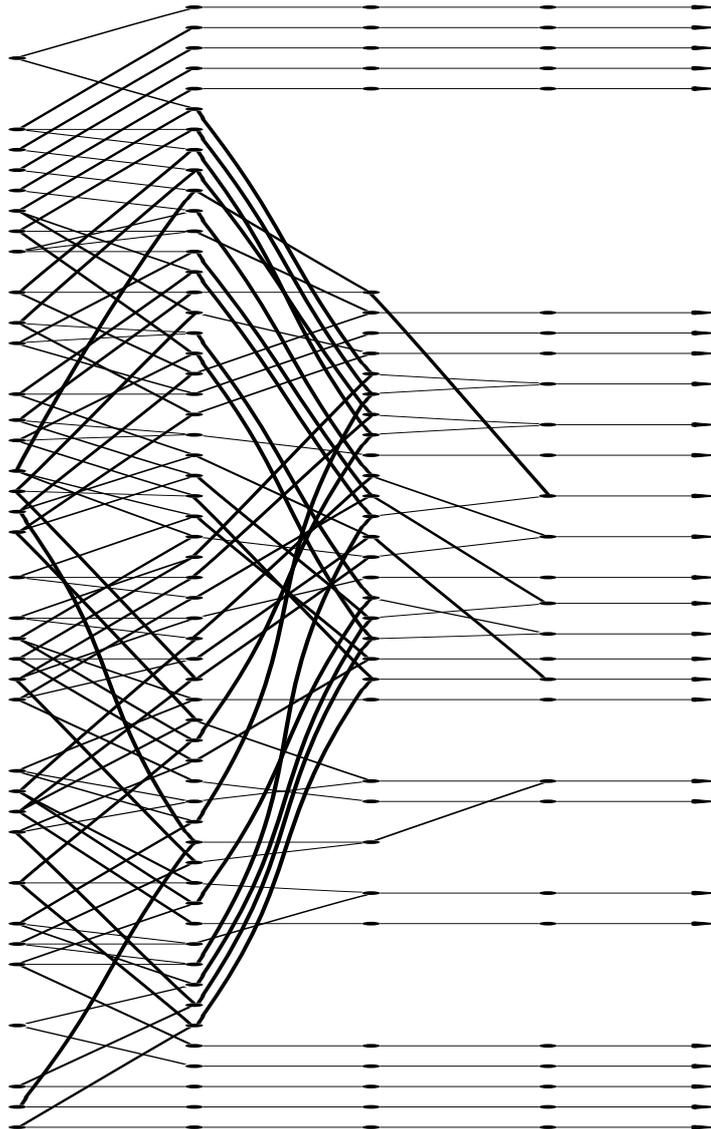


Abbildung 12: Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^4) \setminus \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

C Beispiele einiger komplexerer Graphen

An dieser Stelle liste ich noch ein paar mit dem Computer erstellte Graphen auf. Diese zeigen, wie schnell die Komplexität der Graphen und daher auch der Algorithmen zunimmt.

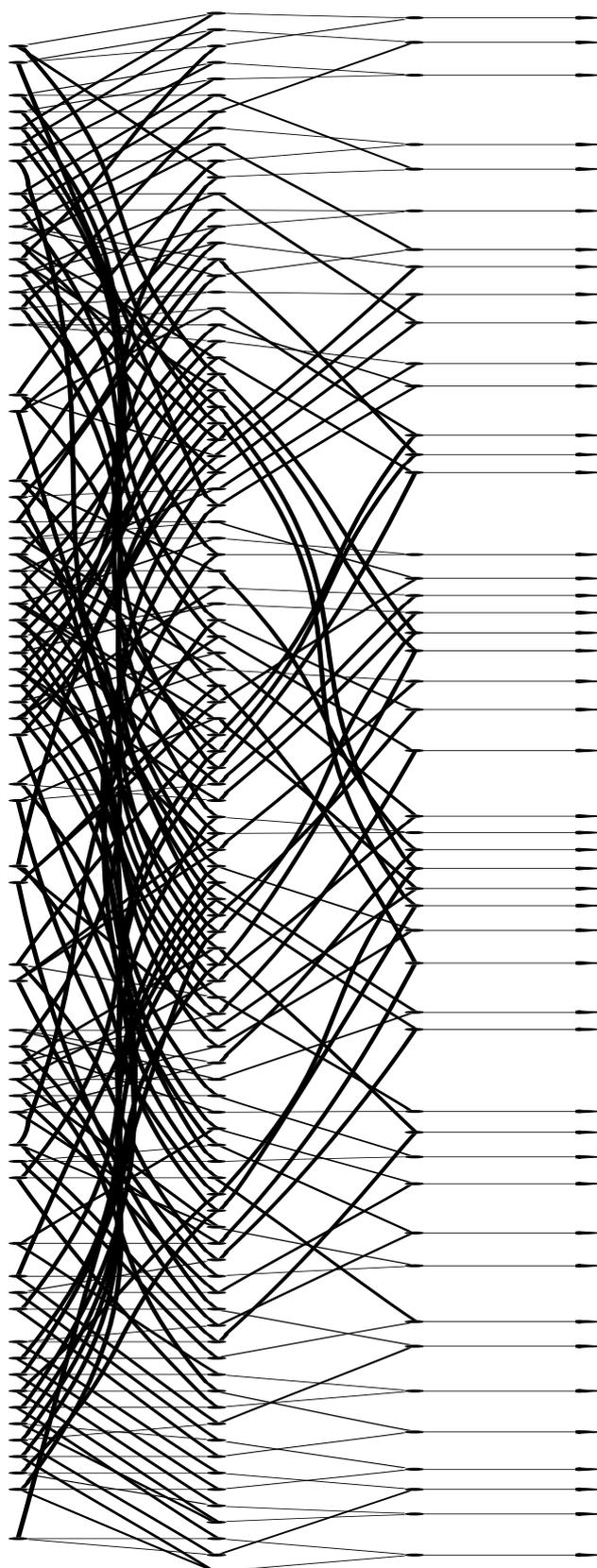


Abbildung 13: Der Quotientengraph von $\Gamma(T^3)\backslash\mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_2$

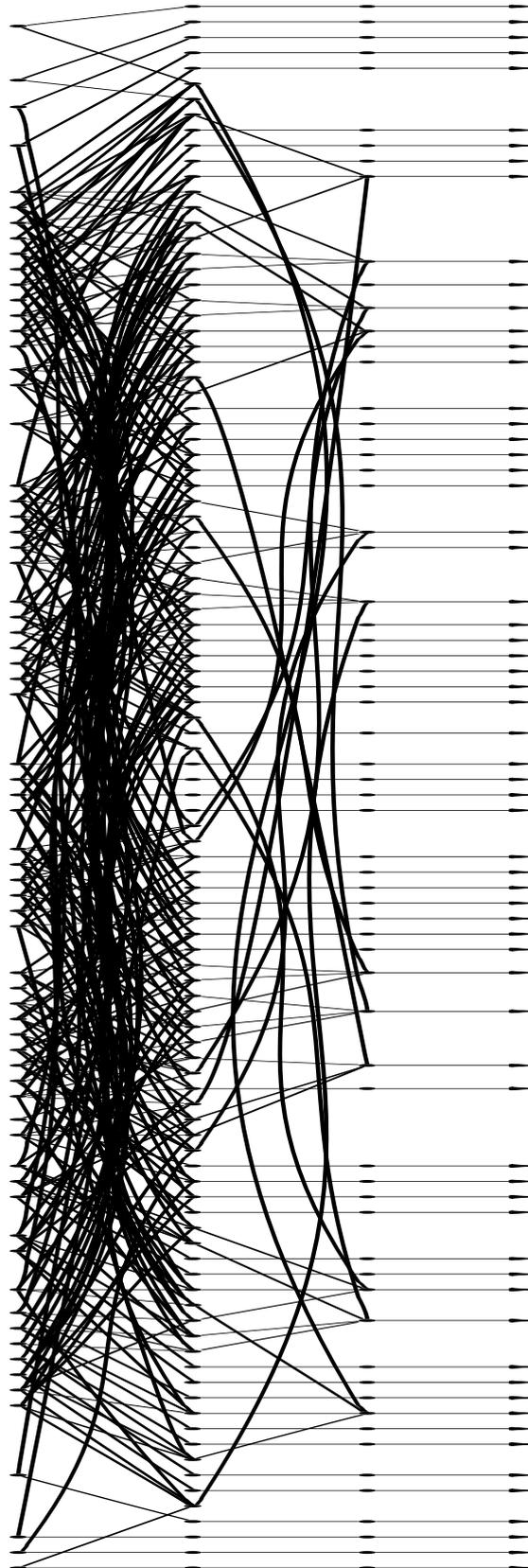


Abbildung 14: Der Quotientengraph von $\Gamma_1(T^3 + T) \backslash \mathcal{T}$ für $k = \mathbb{F}_4$

Literaturverzeichnis

- [Bö] **G. Böckle:** An Eichler-Shimura isomorphism over function fields between Drinfeld modular forms and cohomology classes of crystals, *preprint, available at <http://www.uni-due.de/arith-geom/boeckle/preprints.html>* (2002)
- [Co] **G. Cornelissen:** A survey of Drinfeld modular forms, In: *Drinfeld Moduls, Modular Schemes and Applications*, edited by E.U. Gekeler, M. van der Put, M. Reversat, J. Van Geel, *World Scientific* (1996)
- [Di] **J.D. Dixon, M.P.F. du Sauty, A. Mann, D. Segal:** Analytic pro-p Groups, *Cambridge University Press* (1991)
- [Ge] **E.U. Gekeler:** Drinfeld Modular Curves, *Springer, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1231* (1980)
- [Ja] **N. Jacobson:** Basic Algebra II, *Freeman* (1980)
- [Li] **W.C. Winnie Li, Y. Meemark:** Hecke Operators on Drinfeld Cusp Forms, *Journal of Number Theory* (2007)
- [No] **U. Nonnengardt:** Arithmetisch definierte Graphen über rationalen Funktionenkörpern, *Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik, Universität des Saarlands, Saarbrücken* (1994)
- [Se] **J.P. Serre:** Trees, *Springer Verlag* (1980)
- [St] **W. Stein:** Algorithms For Computing With Modular Forms, *unpublished* (2004)
- [Te1] **J.T. Teitelbaum:** The Poisson Kernel For Drinfeld Modular Curves, *Journal Of The American Mathematical Society* **4**, (1991), **491-511**
- [Te2] **J. T. Teitelbaum:** Rigid Analytic Modular Forms: An Integral Transform Approach, In: *The Arithmetic of Function Fields*, edited by D. Goss, D. R. Hayes, and M. I. Rosen, *deGruyter Press* (1992)
- [Tr] **M. Traulsen:** Modulsymbole für Funktionskörper, *Diplomarbeit im Fachbereich 6, Universität Essen* (1997)