Prof. G. Böckle, Dr. J.M. Cerviño 11. September 2012

Seminar in Algebra, SS2012

Affine algebraische Gruppen

dienstags 14–16 Uhr, HS 2[1]

Das Ziel des Seminars ist affine algebraische Gruppen zu studieren. Dafür werden wir dem Buch [Wat] folgen.[2]

Wir erläutern im Folgenden die einzelnen Vorträge. Ganz gleich welche Vorträge Sie halten, lesen Sie bitte das gesamte Programm aufmerksam durch.
Verweise ohne explizite Literaturangaben sind aus [Wat].

---

1. Affine (algebraische) Gruppen

Der erste Vortrag befasst sich mit der Definition einer *affinen Gruppe* (in [Wat] 'affine group scheme') – vgl. Fussnote 2.

Gehen Sie durch das gesamte Kapitel 1 durch. Wesentlicher bzw. neuer Bestandteil der Definition einer affinen Gruppe ist das Yoneda-Lemma, dessen Aussage relativ einfach zu verstehen ist. Trotzdem ist es empfehlenswert, diese an einem Beispiel (so wie bei $\det : \mathrm{GL}_2 \to \mathbb{G}_m$ im Buch) zu erläutern – der Vortragende sollte auch hierzu Aufgabe 1.1 (a)–(c) machen, um ein besseres Verständnis dafür zu bekommen. Bei der Einführung der Hopf-Algebren geht man ähnlich vor: einfache Beispiele werden vorgeführt ($\mathbb{G}_a$ und $\mathbb{G}_m$ aus S. 9); Aufgaben 1.5 und 1.6 werden noch vom Vortragenden bearbeitet.

Allg. Bem.: Die Aufgaben müssen nicht im Vortrag erläutert werden (die Vortragszeit ist zu knapp dafür)– sie dienen hauptsächlich einem tieferen Verständnis der Begriffe, was sich direkt positiv auf den Vortrag auswirkt.

Der Vortragende kann auch kurz hinweisen, was *algebraisch* in der Definition einer affinen *algebraischen* Gruppe bedeutet – am Besten mündlich, ohne Näheres einzugehen, denn dies wird im späteren Seminarverlauf gründlich erläutert (s. S. 24, letzter Paragraph vor dem Korollar).

Das Buch von Milne geht am Anfang sehr ähnlich wie Waterhouse vor. Es ist trotzdem empfehlenswert wenigstens einen Blick darauf zu werfen – die Einleitung, wenngleich etwas schwierig gleich am Anfang des Seminars zu verstehen, sollte auch *jeder Teilnehmer* lesen.

Literatur: [Wat, Ch. 1], ergänzend [Mi, Ch. I].

Vortragender: Samuel Kilian 16.10.2012

---

[1] Erster Termin: 16.10.2012.

[2] Wir benutzen im gesamten Seminar die *'modernere'* Begriffsbildung, wonach ein *affines algebraishes Gruppenschema* im Sinne von [Wat] (affine group scheme) einfach "affine algebraische Gruppe" genannt wird – cf. [Mi, S. 96, Aside 5.16].

2. Beispiele affiner (algebraischer) Gruppen

Hierbei ist das Ziel verschiedene affine (algebraische) Gruppen einzuführen: diagonalisierbare/konstante/endliche affine Gruppen. Besonderes Augenmerk sollte auf §2.4 gerichtet sein – hierfür kann auch als Ergänzung [Pi, Lecture 2] hilfreich sein. Die vom Vortragenden selber zu bearbeitenden Aufgaben (s. Erläuterung bei Vortrag 1 für den "Sinn der Sache") sind 2.1 und 2.9.

Literatur: [Wat, Ch. 2], [Mi, Ch. IV], [Pi, Lecture 2].

Vortragender: Wen Liu 23.10.2012

---

3. Darstellungen

Wir studieren das gesamte Kapitel 3. Hier wird (ausführlich, im Gegensatz zum kurzen Kommentar aus Vortrag 1) der Begriff von affiner algebraischer Gruppe und seiner Bedeutung eingeführt. Wichtiges Resultat hierbei ist es, dass affine algebraische Gruppen über Körpern isomorph zu abgeschlossenen Untergruppen von GL_n sind, sowie die Konstruktion aller endlichdimensionaler Darstellungen von abgeschlossenen Untergruppen von GL_n.

Die vom Vortragenden zu bearbeitenden Aufgaben sind hierbei 3.1 und 3.6.

Literatur: [Wat, Ch. 3], [Mi, Ch. VIII][3].

Vortragende: Charlotte Ure 30.10.2012

---

4. Algebraische Matrizengruppe, Zusammenhangskomponente

Wir beginnen mit einfachen Resultaten über die Zariski-Topologie in k^n, wobei k ein Körper ist.[4] Wir definieren dann *algebraische Matrizengruppen* und konstruieren die zugehörigen darstellbaren Funktoren, die uns ermöglichen, wenn der Körper k nicht endlich ist, affine algebraische Gruppen *mit dichten rationalen Punkten*[5] als algebraische Matrizengruppen zu realisieren – cf. erstes Korollar auf S. 32.

Anschliessend studieren wir erste allgemeine Strukturaussagen für diese algebraischen Matrizengruppen (§4.5 und §4.6). Darüberhinaus wird eine *schöne* Zusammenfassung schon aus der Algebra II bekannter Resultate über Irreduziblen- bzw. Zusammenhangskomponenten (§§5.1–5.5).

Die vom Vortragenden zu bearbeitenden Aufgaben sind hierbei 4.3 und 4.7.

Literatur: [Wat, §§4.1–5.5].

Vortragender: Moritz Schönwandt 6.11.2012

---

5. Zusammenhangskomponente und separable Algebren

In diesem Vortrag befassen wir uns mit den Zusammenhangskomponenten von affinen (algebraischen) Gruppen über Körpern.

Wir motivieren das Problem (§6.1) und führen anschließend den Begriff von separablen Algebren (§6.2) ein. Der Beweis vom Theorem aus §6.3 wird skizziert (hier wird ein wenig Galoistheorie benutzt). Die restlichen Abschnitte werden ausführlich präsentiert – wichtige Punkte dabei sind die Definition von der Zusammenhangskomponente einer affinen Gruppe und dem Struktursatz von endlichen affinen Gruppen über perfekten Körpern.

---

[3] Beachten Sie immer auf die von uns benutzte Terminologie – dieselbe wie bei Milne. S. [Mi, S. 96, Aside 9.16].

[4] Bitte schreiben Sie k für einen (kommutativen) Ring der auch ein Körper ist, ansonsten für beliebige kommutative Ringe schreiben Sie bitte A, B, C, R oder S, wenn möglich.

[5] D.h. $G(k)$ dicht in G.

Die Aufgaben hier sind 6.12 und 6.13.

Literatur: [Wat, Ch. 6], hilfreich kann auch [Pi] sein.

Vortragender: Juan Cerviño 13.11.2012

---

6. Multiplikative algebraische Matrizengruppen

Wir studieren bestimmte kommutative affine Gruppen: die von multiplikativem Typ. Diese werden durch deren Charakteren-Gruppe beschrieben (als Galois-Moduln) – letztes Theorem auf S. 55. Dann studieren wir anisotrope und sog. ‘split’ Tori, sowie Beispiele derer. Der Vortrag endet mit dem Resultat, dass jede Wirkung (via Automorphismen) von affinen zusammenhängenden Gruppen auf affinen Gruppen von multiplikativem Typ trivial sein muss.

Aufgabe 7.4 soll vom Vortragenden bearbeitet werden.

Literatur: [Wat, Ch. 7].

Vortragender: Lutz Hofmann 20.11.2012

---

7. Unipotente Gruppen

Ein weiterer Typ von affinen Gruppen wird eingeführt: die *unipotenten* Gruppen. Wir fangen mit der Definition von unipotenten Elementen einer (Matrizen-) Gruppe, dem Kolchin-Fixpunktsatz. Für unipotente affine algebraische Gruppen gibt es verschiedene Charakterisierungen (Theorem auf S. 64). Wir studieren dann die strukturelle Unterschiede von unipotenten affinen Gruppen wenn der Körper k positive Charakteristik hat (§§8.4–8.5) – hierzu sind Aufgaben 8.10 und 8.11 lehrreich.

Der Vortrag endet mit dem sog. Lie-Kolchin Triangularisierungssatz (§10.2, S. 74) und seinem Korollar – hier wird das Resultat benutzt (im folgenden Vortrag bewiesen), dass irreduzible Darstellungen abelscher affiner Gruppen eindimensional sind.

Literatur: [Wat, Ch. 8, §§10.1–10.2].

Vortragende: Charlotte Ure 27.11.2012

---

8. Jordan-Zerlegung

Die klassische Jordan-Zerlegung von Matrizen wird auf natürlicher Weise auf algebraische Matrizengruppen übertragen. Dies ermöglicht über perfekten Körpern abelsche algebraische Matrizengruppen als direktes Produkt von kanonisch definierten unipotenten und multiplikativen Untergruppen zu beschreiben.
Der Vortrag endet mit den Abschnitten 10.3 und 10.4, bzw. mit dem Struktursatz für nilpotente algebraische Matrizengruppen.
Die Aufgaben sind 9.2 und 10.3.

Literatur: [Wat, Ch. 9, §§10.3–10.4].

Vortragender: Samuel Kilian 4.12.2012

---

9. DIFFERENTIALE

Das Hauptziel des Vortrages ist ein Kriteuim für die Reduziertbarkeit von $k[G] \otimes \bar{k}$ für G eine affine algebraische Gruppe über einem Körper k (§11.6). Dieses wird über dem Rang der Differentiale ausgedrückt – bzw. über *Glattheit* von der affinen algebraischen Gruppe G. Um dies zu verstehen, studieren wir die (relativen) Derivationen und Differentiale über Ringen (§§11.1–11.5). Der Beweis vom Theorem in §11.6 wird aber erst im Vortrag 11 abgeschlossen, durch Resultate aus der (reinen) kommutativen Algebra.

Aufgaben 11.3 und 11.11 sollten bearbeitet werden.

Literatur: [Wat, Ch. 11].

Vortragender: Moritz Schönwandt 11./18.12.2012

---

10. LIE ALGEBREN

Wir studieren weitere infinitesimale Eigenschaften von affinen Gruppen, diesmal über die *Lie-Algebren* zu affinen Gruppen. Wir definieren diese, beweisen elementare Eigenschaften – insb. im Bezug auf glatte affine algebraische Gruppen – und Rechnen einige Beispiele aus. Am Ende studieren wir Darstellungen von affinen algebraischen Gruppen via Darstellungen von der zugehörigen Lie-Algebren.

Die Aufgaben hier sind 12.2 und 12.13.

Literatur: [Wat, Ch. 12].

Vortragender: Lutz Hofmann 8./15.1.2012

---

11. TREU-FLACHHEIT

Aufgrund der erworbenen Vorkenntnissen aus der Algebra II – der Beweis vom Theorem in §13.4 sollte dann nur skizziert werden – und aus den vorherigen Vorträgen kann man direkt den Beweis für das Theorem aus §11.6 abschließen (§13.5).

Dann geht man auf das nächste Kapitel über und zeigt man (zunächst einmal in Charakteristik Null), dass Hopf-Algebrenerweiterungen treu flach sind, dann in positiver Charaktereistik, anschließend mit Anwendungen (§§14.1–14.3). Der Vortrag endet mit dem Struktursatz für zusammenhängende, endliche, affine Gruppen.

Aufgaben 11.5 und 14.2 sollten bearbeitet werden.

Literatur: [Wat, Ch. 13 u. 14].

Vortragender: Andreas Rausch 22.1.2013

Man könnte das Seminar mit zwei weiteren Vorträgen zum Thema *Quotienten* nach (endlichen) affinen Gruppen abschließen – hierzu wäre [Pi] sehr hilfreich.

Vortragender: Juan Cerviño 29.1.2012

LITERATUR

[Mi] J.S. Milne, Basic theory of algebraic group schemes, Version 1.00, 2012.

[Pi] R. Pink, Finite group schemes, Lecture Notes, 2004.

[Wat] W.C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, GTM 66, Springer, 1979.