# Seminar Modularität und Patching

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Konrad Fischer, Peter Gräf

Seminar im Wintersemenster 15/16, dienstags 14:15 – 15:45 Uhr, INF 368, Raum 248

**Anmeldung:** Bis **15.09.2015** per Email an: konrad.fischer@iwr.uni-heidelberg.de

## Motivation und Ziele des Seminars

Ein zentraler Bereich der modernen Zahlentheorie ist die Frage nach der Modularität von geometrischen Objekten. Das bekannteste Beispiel ist der Fall elliptischer Kurven $E$ über $\mathbb{Q}$. Dass $E$ *modular* ist, bedeutet, dass eine kuspidale Heckeeigenform $f$ existiert, so dass für die zu $E$ und $f$ gehörigen $L$-Funktionen $L(E,s) = L(f,s)$ gilt. Galoistheoretische formuliert bedeutet dies, dass die $p$-adischen Galoisdarstellungen zu $E$ und $f$ übereinstimmen: Die $p$-adische Galoisdarstellung $\rho_{E,p}$ zu $E$ ist die auf dem $p$-adischen Tate-Modul definierte $\mathbb{Q}_p$-lineare Operation der absoluten Galoisgruppe $G_\mathbb{Q} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ von $\mathbb{Q}$. Die zu $f$ assoziierte $p$-adische Galoisdarstellung $\rho_{f,p}$ ist schwieriger zu konstruieren. Im Seminar wird eine axiomatische Beschreibung gegeben, ohne auf die Konstruktion im Detail einzugehen. Nun kann man Modularität so formulieren, dass man einen Isomorphismus von $G_\mathbb{Q}$-Darstellungen $\rho_{f,p} \cong \rho_{E,p}$ fordert.

Isomorphismen wie in der vorangegangenen Zeile beweist man folgendermaßen. Zunächst fixiert man eine residuelle Darstellung $\bar{\rho}\colon G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$, z.B. die Operation von $G_\mathbb{Q}$ auf den $p$-Torsionspunkten der elliptischen Kurve $E$. Dann definiert man rein galoistheoretisch (unter Verwendung $p$-adischer Hodge Theorie) eine universelle Deformation $\rho^u\colon G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(R^u)$, welche alle $p$-adischen Galoisdarstellungen parameterisiert, die modular sein sollten, und die gegebene residuelle Darstellung $\bar{\rho}$ besitzen. Auf der Seite der Modulformen konstruiert man eine geeignete Heckealgebra $\mathbb{T}$ und eine universelle modulare Galoisdarstellung $\rho^m\colon G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{T})$. Aufgrund der Universaltiät von $\rho^u$ erhält man einen kanonischen Homomorphismus $R \to \mathbb{T}$ von $\mathbb{Z}_p$-Algebren, und es ist zu zeigen, dass dies ein Isomorphismus ist. Das zentrale Hilfsmittel hierfür ist eine *Patching Methode*, die auf Taylor und Wiles zurückgeht. Weitere Verbesserungen stammen von Kisin. Eine sehr gute Darstellung hiervon findet sich in [Gee]. Eine Weiterentwicklung findet sich in der Arbeit [CG]. Anstelle von Objekten arbeitet man mit Komplexen. Dies erlaubt es auf eine der Grundannahmen des Taylor-Wiles-Kisin Patching zu verzichten. Im Gegenzug müssen Vermutungen über das Verhalten der Kohomologie arithmetischer Gruppen angenommen werden. Eine mögliche Anwendung des Patching könnte anhand der Arbeit [All] besprochen werden.

Im Seminar behandeln wir anhand der Quellen [Gee, CG, All] folgende Themen:

- I *Galoisdarstellungen und universelle Deformationsringe.* [Gee]
- II *Heckealgebren über $\mathbb{Z}_p$.* [Gee]
- III *Modularitätssätze und Patching.* [Gee]
- IV *Patching ohne die numerische Taylor-Wiles Bedingung.* [CG]
- V *Die Kohomologie der adungierten Darstellung.* [All]

**Benötigte Vorkenntnisse:** Algebraische Zahlentheorie 1,2 (Galoiskohomologie?), Modulformen.

## Literatur

[All] Patrick Allen. Deformations of polarized automorphic Galois representations and adjoint Selmer groups, 2014. `http://www.math.northwestern.edu/~pballen/PolSmooth.pdf`.

[CG] Frank Calegari and David Geraghty. Modularity lifting beyond the Taylor-Wiles method, 2014. `http://www.math.uchicago.edu/~fcale/papers/merge.pdf`.

[Gee] Toby Gee. Modularity lifting theorems. Notes from the Arizona Winter school, 2013, `http://wwwf.imperial.ac.uk/~tsg/Index_files/ArizonaWinterSchool2013.pdf`.