Proseminar p-adische Analysis

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Peter Gräf

Sommersemester 2016, Dienstag 14.00 Uhr–16.00 Uhr

Motivation und Ziele des Proseminars

Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kann bezüglich verschiedener Absolutbeträge vervollständigt werden. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entstehen durch Vervollständigung bezüglich des Standardabsolutbetrages und ihre Topologie und Analysis sind Gegenstand der Vorlesung Analysis 1. In diesem Proseminar wollen wir die Vervollständigung der rationalen Zahlen bezüglich des p-adischen Absolutbetrags betrachten, welche man als *p-adische Zahlen* $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet. Hierbei bezeichnet $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Die Topologie dieser Körper unterscheidet sich sehr stark von der reellen, so ist z.B. jeder Punkt in einem offenen Ball Mittelpunkt dieses Balles und jedes Dreieck ist gleichschenklig. Die fundamentale Bedeutung der p-adischen Zahlen für die Zahlentheorie wird im Henselschen Lemma deutlich, welches uns ein einfaches und effektives Kriterium zur Lösung von Diophantischen Gleichungen liefert.
Im ersten Teil des Proseminars wollen wir zunächst allgemeine Absolutbeträge auf Körpern betrachten und den p-adischen Absolutbetrag als Beispiel eines ultrametrischen Betrages einführen. Nachdem wir die ultrametrische Topologie allgemein untersucht haben, zeigt uns der Satz von Ostrowski, dass die p-adischen Absolutbeträge neben dem Standardabsolutbetrag (bis auf Äquivalenz) die einzigen nichttrivialen Beträge auf $\mathbb{Q}$ sind. Dadurch motiviert wollen wir $\mathbb{Q}_p$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ konstruieren und genauer untersuchen. Als erstes großes Ergebnis wollen wir das Henselsche Lemma beweisen und einen Ausblick in die sogenannten Lokal–Global–Prinzipen geben, die die zahlentheoretische Bedeutung der p-adischen Zahlen manifestieren.
Im zweiten Teil des Proseminars wenden wir uns der p-adischen Analysis zu. Zunächst wollen wir wie in der klassischen Analysis Folgen, Reihen und den Begriff der Differenzierbarkeit einführen. Auch wenn die Definitionen denen aus der reellen Analysis gleichen, werden wir viele neue Phänomene beobachten, beispielsweise werden wir sehen, dass eine p-adische Reihe *genau dann* konvergiert, wenn ihre Koeffizienten eine Nullfolge bilden. Im Anschluss daran werden wir Potenzreihen betrachten und das Nullstellenverhalten der durch diese definierten Funktionen untersuchen. Im Zuge dessen werden wir den Satz von Strassman beweisen. Zum Abschluss des Proseminars wenden wir uns der Approximation stetiger Funktionen und dem Studium des p-adischen Logarithmus und der p-adischen Exponentialfunktion zu, welche es uns ermöglichen die Einheitengruppe der ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ besser zu verstehen.

Organisatorisches

- *Vorbesprechung:* **Dienstag, den 09.02.2016 um 11 Uhr c.t. ins Hörsaal 2 in INF 288**
- *Voraussetzungen:* Erfolgreiche Teilnahme an den Vorlesungen Analysis 1 und Lineare Algebra 1
- *Homepage:* `https://typo.iwr.uni-heidelberg.de/groups/arith-geom/home/`
- Spätestens zwei Wochen vor dem eigenen Vortrag oder generell bei Verständnisfragen in die Sprechstunde kommen (Peter Gräf: Donnerstag, 14.00 Uhr–16.00 Uhr)