Seminar - Lokale Klassenkörpertheorie nach Lubin-Tate

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle K. Fischer

Im ersten Teil des Programms (1-3) werden die Grundlagen unendlicher Galois-Theorie, Moduln über (unendlichen) Galois-Gruppen und schließlich lokale Körper und ihre Erweiterungen kurz wiederholt.

Der zweite Teil (4-8) widmet sich dann dem Hauptthema *'Lubin-Tate-Theorie'*, wobei wir nach den Notes [Yo] vorgehen. Alle Paragraphenangaben beziehen sich auf diese Quelle.

Der dritte (und optionale!) Teil (9-11) kann bei Interesse noch eine kurze Übersicht des kohomologischen Zugangs zur Klassenkörpertheorie geben. Da die Maschinerie der Gruppenkohomologie hier ohne längere Einführung verwendet wird, sind diese Vorträge nur für Studenten gedacht, die bereits Vorkenntnisse in diese Richtung haben.

1 Unendliche Galois-Theorie ([Ne2], §IV.1)

- Beispiel $\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p$: Warum Galois-Theorie nicht für unendliche Erweiterungen gilt.
- Krull-Topologie und Hauptsatz der unendlichen Galois-Theorie (1.1+1.2)
- Pro-endliche Gruppen (1.3) und Übungen 3,4 und 5

2 Proendliche Gruppen und stetige Moduln ([Ne2], §IV.2)

- Kurze Wdh: Projektive und induktive Systeme von Gruppen und ihre Morphismen
- Wann sind proj. Limiten nicht leer (2.3).
- Charakterisierung proendlicher Gruppen (2.8) und Beispiele G_K, $\mathbb{Z}_p$ und $\mathcal{O}_K$
- Stetige G-Moduln (p. 276) und ihre Morphismen

Wir folgen [Yo] von hier an. Vergleiche für mehr Details auch [Iw].

3 Vollständinge diskrete Bewertungsringe

- Appendix I: (Vollständige) diskrete Bewertungsringe und ihre Erweiterungen, Hensels Lemma.
- §2.1: Unendliche Erweiterungen lokaler Körper
- §2.2: Vollständige und endlich verweigte Erweiterungen, Weil-Gruppe

4 Formale Gruppen, pp. 4-6

(siehe auch [Iw] §4.1+4.2)

- §3.1: Kategorie der formalen Gruppen über einem Ring A
- §3.2: Lubin-Tate Gruppen über einem lokalen Körper; Def. der f_m

5 Lubin-Tate Erweiterungen und die Artin-Abbildung, pp. 6-9

- §4.1: Def. der 'Torsionspunkte' $\mu_{f,m}$, der $L_f^m = L(\mu_{f,m})$ und Beweis von $\mathrm{Gal}(L_m^f/L) \cong (\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)^\times$.
- §4.2: Die Artin-Abbildung $W(\hat{K}_f^{LT}/K) \to K^\times$.

6 Norm-Gruppen, pp. 9-12

- §5.1: Eigenschaften der Norm $N_{K_n/K}$ für unverzweigte Erweiterungen
- §5.2: Der verzweigte Fall: Coleman-Operatoren

7 Basiswechsel und höhere Verzweigungsgruppen, pp. 12-15

- §5.3: Norm-Kompatibilität der Artin-Abbildung und LCFT für K^{LT}/K.
- §6.1: Def. und Eigenschaften der höheren Verzweigungsgruppen

8 Die Sätze von Hasse-Arff und Kronecker-Weber, pp. 15-17

- §6.2: ϕ und die 'obere Nummerierung'; Satz von Hasse-Arff
- §6.3: Lokaler Kronecker-Weber-Satz: $K^{LT} = K^{ab}$

Ab hier liegt der Fokus nicht mehr auf vollständigen Beweisen. Der technische Unterbau ist aber umfangreicher. Die Vorträge haben '*' im Titel um deutlich zu machen, dass sie nur optional sind. Es werden zunächst Vorträge 1-8 vergeben!

9 Übersicht Gruppenkohomologie*

Quelle z.B. [Ne], §I (dies sind 60 Seiten!)

- (Tate-)Kohomologie proendlicher Gruppen
- Funktorialitäten: δ-Funktor, Inf-Res-Folge
- Zyklische Gruppen und Tate's Theorem

10 Klassenformationen*

Wir folgen [Ne], §II.1.

- Klassenformationen (Def. 1.3) und ihre Eigenschaften (Prop. 1.4, 1.6)
- Hauptsatz (1.7) und Folgerungen (1.9)
- Kompatibilitäten (1.11) und (universelle) Norm-Rest-Symbole (1.15)

11 Lokale Klassenkörpertheorie, kohomologisch*

Wir folgen [Ne], §II.5 und II.6.

- Die lokale Klassenformation $(G_K, \bar{K}^\times)$ (Thm 5.6)
- Das lokale Norm-Rest Symbol (Thm 5.12)
- Der Existenz-Satz (Thm 6.2)

References

[Iw] K. Iwasawa, *Local class field theory*, Oxford University Press, 1986.

[Ne] J. Neukirch, *Class field theory*; A. Schmidt (Ed.), 2nd ed., Springer, 2015.

[Ne2] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*; Springer, 1999.

[Yo] T. Yoshida, *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, lecture notes, 2008, 21pp.