Seminarprogramm Wintersemester 2011/12
Siegel'sche Modulformen

Voraussetzungen: Kenntnisse über Siegel'sche Modulformen.

Vorbesprechung: am Dienstag, dem 19. 7. 2011, um 13 Uhr c.t.
in Hörsaal 3, INF 288.

Betreuer: Dr. Thanasis Bouganis, Dr. Juan Cerviño, Dr. Hendrik Kasten

Vorträge

1 Heckeoperatoren für Modulformen halbganzen Gewichts — K

Statt der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Paare (α, φ) aus je einer Matrix $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ und je einer holomorphen Funktion

$$\varphi(z)^2 = t \cdot \det(\alpha)^{-\frac{1}{2}}(cz + d) \quad \text{mit } t \in \mathbb{C} \text{ mit } |t| = 1$$

auf $\mathbb{H}$. Mit der Funktion φ als Automorphiefaktor führen wir einen verallgemeinerten Petersson-Strichoperator ein, mit dessen Hilfe wir die Begriffe der *Fuchs'schen Gruppe* und der *(meromorphen) automorphen Form halbganzen Gewichts* definieren.

Für je zwei Fuchs'sche Gruppen Δ_1, Δ_2 betrachten wir nun die Doppelnebenklassen $\Delta_1(\alpha, \varphi)\Delta_2$ von $(\alpha, \varphi) \in \mathfrak{G}$ mit $\det(\alpha) = 1$ und untersuchen deren Wirkung auf automorphe Formen bezüglich Δ_1. Schließlich untersuchen im Fall $\Delta_1 = \Delta_2$ genauer, wie sich die Doppelnebenklassenbildung mit der natürlichen Projektion $\mathfrak{G} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ verträgt.

Nun schränken wir uns auf den Spezialfall von Kongruenzuntergruppen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ als Fuchs'sche Gruppen ein und zeigen dort einige sehr explizite Propositionen, wie etwa die Kommutativität der Multiplikation bestimmter Doppelnebenklassen. Die genaue Gestalt des Automorphiefaktors in diesem Setting zitieren wir hier aus dem zweiten Vortrag. Wir schließen mit der Definition von Heckeoperatoren in dieser Situation und der Berechnung ihrer Aktion auf den Fourierkoeffizienten geeigneter Modulformen. Besonderes Augenmerk ist darauf zu richten, dass die Definition der Heckeoperatoren hier nur für solche mit quadratischem Grad gelingt, und wieso das so ist.

Literatur: Abschnitt 1 von [Shi1]. Für genaueres zu Modulformen halbganzen Gewichts siehe auch Abschnitt VI.5 in [FB].

2 Der Shimuralift B

Das Hauptziel dieses Vortrags ist die Definition des *Shimuralifts* und das Angeben einer Beweisskizze davon. Grob gesagt ist der Shimuralift eine Abbildung von einem Raum elliptischer Modulformen halbganzen Gewichts in einen Raum von Modulformen ganzen Gewichts. Diese Abbildung wurde von Goro Shimura in [Shi1] über eine Gleichung von L-Funktionen definiert. Hier ist ein möglicher Verlauf dieses Vortrags:

- Wir beginnen mit der Formulierung des Hauptsatzes, dem Main Theorem und seinem Corollary in auf Seite 458 von [Shi1].
- Wir formulieren ohne Beweis den Satz von Weil über die Charakterisierung von Modulformen (Lemma 3.1 in [Shi1]). Dieser ist eine Art von Umkehrsatz; er beschreibt, wann eine formale q-Entwicklung zu einer Modulform gehört.
- Nun fangen wir mit dem Beweis des Hauptsatzes an. Zuerst betrachten wir (in Shimuras Notation) den Fall $t = 1$. Wir definieren die Dirichletreihe $D(s, \psi) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)A_1(n)n^{-s}$ zum Charakter ψ. Es ist zu zeigen, dass $D(s, \psi)$ eine analytische Fortsetzung besitzt und einer bestimmten Founktionalgleichung genügt. Man schreibt diese Reihe als ein Rankin-Selberg-Integral. Nach Seite 468 in [Shi1] gilt mit $\psi(-1) = (-1)^\nu$

  $$2(4\pi)^{-s}\Gamma(s)D(2s - \nu, \psi) = \int_\Phi f(z)\overline{h(z)}C(z, s)dz,$$

  wobei f eine gegebene Modulform halbganzen Gewichts ist,

  $$h(z) := h_\psi(z) := 2^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\psi(m)}m^\nu e(m^2 z)$$

  eine Theta-Reihe, und $C(z, s)$ als eine Epstein-Eisensteinreihe darstellbar ist.
- Wir untersuchen nun die Eigenschaften von $h(z)$, zeigen also ihre Modularität und ihre Funktionalgleichung. Das ist Proposition 2.2 in [Shi1].
- Dann studieren wir Eigenschaften von Rankin-Integralen und Epstein-Eisensteinreihen. Das ist Lemma 3.3 in [Shi1]. Wahrscheinlich reicht die Zeit nicht für einen Beweis, also sollten wir diese Aussage einfach als wahr annehmen.
- Mit Hilfe von Lemma 3.3 und der obigen Darstellung kann man jetzt die analytische Fortsetzung von $D(s, \psi)$ zeigen (siehe Seite 469 in [Shi1]).

- Für die Funktionalgleichung betrachten wir nur die einfachste Situation, nehmen also (in Shimuras Notation) $r = 1$ und $N = M$ an. In diesem Fall kann man wie auf Seite 470 in [Shi1] leicht die Funktionalgleichung zeigen.
- Abschließend betrachten wir den Fall $t \geq 1$. Das ist in [Shi1] auf den Seiten 475 und 476 zu finden.

Literatur: Abschnitte 2 und 3 in [Shi1].

3 Der Kohnenraum K

Wir führen den *Kohnen-+-Raum* als Teilraum des Raums $M_{k+\frac{1}{2}}(4)$ der Modulformen vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ bezüglich der Kongruenzgruppe $\Gamma_0(4)$ ein und zeigen, dass der Shimuralift zwischen diesem Raum und einem geeigneten Raum von Modulformen ganzzahligen Gewichts bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist.

Wir definieren einen Operator U_4W_4 und beschreiben den Unterraum der Spitzenformen im Kohnenraum als Eigenraum unter diesem. Das nutzen wir aus, um zu zeigen, dass der Kohnenraum Hecke-invariant ist und der Raum der Spitzenformen darin sogar eine Orthogonalbasis aus Heckeeigenformen hat.

Ikeda wendet Kohnens Resultate auf die gewöhnliche Eisensteinreihen vom Gewicht $2k$ an und erhält so Informationen über die zugehörige Funktion im Kohnenraum, die Cohen-Eisensteinreihe.

Abschließend studieren wir noch eine spezielle Funktion h, die wir in Vortrag 11 benötigen werden.

Literatur: Die Propositionen 1 und 2 sowie Theorem 1 in [Koh] und Abschnitt 2 in [Ike2].

4 Siegel'sche Reihen I C

Das Ziel der Vorträge *Siegelsche Reihen I* und *II* ist die Konstruktion der so genannten *Fourier–Jacobi Koeffizienten* des *Ikeda-Lifts*, wodurch eigentlich der Ikeda-Lift definiert wird.

Siegel'sche Reihen wurden von Siegel in seinem Werk über quadratischen Formen eingeführt. Den Namen hat allerdings Shimura geprägt (s. Seiten 429-435 in [Shi2], wo er die Beziehung zwischen Siegel'schen Reihen und den Koeffizienten Eisenstein'scher Reihen erläutert, übrigens in größerer Allgemeinheit als bei Siegel).[1]

Nach dieser Feststellung liegt es einem nahe, Eisensteinsche Reihen oder allgemeiner Siegelsche Modulformen anhand von Siegel'schen Reihen zu konstruieren. Der Vorgang, den Ikeda wählt, ist aber sehr technisch und erstaunlich zugleich, denn er kann anhand den Siegel'schen Reihen Siegel'sche *Spitzen*eigenformen konstruieren (mit noch weiteren Bedingungen). Hierfür scheint der Übergang zu elliptischen Modulformen halbganzen Gewichts von Bedeutung zu sein.

Im diesem ersten Vortrag wird die Formel

$$F_p(B; p^{-s}) = b_p(B, s)\gamma_p(B; p^{-s})^{-1}$$

bewiesen (s. Seite 645 in [Ike2]).

Wir beweisen vollständig Proposition 3.6 in [Shi3], also die obige Formel für nicht ausgeartetes B. Hierbei darf Lemma 3.3 ohne Beweis benutzt werden, da es im Vortrag über die Konvergenz des Lifts bewiesen wird. Als nächstes erklären wir die Aussage von Theorem 3.2 in loc. cit. und skizzieren seinen Beweis (vgl. Theoreme 1 und 2 in [Kit1]). Kitaokas Arbeit ist klar geschrieben, und deswegen wäre es schön zu wissen, ob darin tatsächlich ein Fehler für $p = 2$ ist, oder ob Shimura einfach nicht *„hinreichend überzeugt“* ist.[2].

Literatur: Abschnitt 1 in [Ike2], Abschnitt 3 in [Shi3], [Kit1] und Abschnitte 3 und 5 in [Shi2].

5 Siegel'sche Reihen II C

Hier werden die restlichen Formeln aus dem ersten Abschnitt von [Ike2] bewiesen. Konkret geht es um Theorem 3.2 aus [Kat]. Wir beweisen Lemma 9 aus [Kit1] (Lemma 3.3 in [Kat]) und anschließend die Funktionalgleichung (Theorem 3.2 loc. cit.).

Wenn Zeit und Energie auf der Seite des Vortragenden sind, wären ein paar Worte zu den Remarks auf den Seiten 430 und 448 von [Kat] wünschenswert.

[1]Die ersten Betrachtungen in dieser Hinsicht (Beziehung zwischen Koeffizienten Eisenstein'scher Reihen und *lokalen Darstellungsdichten*) stammen von G. Eisenstein und H. Minkowski. Sie wurden natürlich nicht in unserer heutigen mathematischen Sprache ausgedrückt.

[2]S. 546 in [Shi3] "... but the proof for $p = 2$ is hardly convincing.„ Es ist bei ihm oft zu sehen, dass er Fehler in Arbeiten ganz direkt zeigt und erklärt. Hier bei Kitaoka drückt er sich ein bisschen, so dass es nicht klar ist, ob tatsächlich ein Fehler drin ist oder nicht (ihm anscheinend auch nicht).

Literatur: Abschnitt 1 in [Ike2], Abschnitt 4 in [Kat] und Lemma 9 in [Kit1].

6 Formulierung der Hauptsätze C

Dieser Vortrag erklärt Abschnitt 3 in [Ike2]. Außerdem werden die Standard-L-Reihe einer Hecke-Eigenform sowie klassische L-Reihen zu elliptischen Modulformen eingeführt.

Literatur: Abschnitte 2 und 3 in [Ike2], [Maa], [Kit2].

7 Konvergenz des Lifts C

Das ist Abschnitt 4 in [Ike2]. Wir beweisen Lemma 4.1 und sein Korollar, sowie Lemma 3.3 aus [Shi3] (bzw. aus den Arbeiten von Siegel wie in loc. cit. verlinkt).

Literatur: Abschnitt 4 in [Ike2], [Shi3].

8 Fourierkoeffizienten der Siegel'schen Eisensteinreihen B

Das Ziel dieses Vortrags ist, die Fourierkoeffizienten der Siegel'schen Eisensteinreihen explizit zu berechnen. Es ist bekannt, dass diese vom Typ

$$E_{2g,k}(Z,s) = \sum_{B} c_{2g,k}(B;Y,s)e^{2\pi i \operatorname{tr}(BX)}$$

ist, wobei die symmetrische Matrizen X, Y durch die Gleichung $Z = X + \mathbf{i}Y$ definiert sind und die Summe ein Gitter symmetrischer Matrizen durchläuft. Unser Ziel ist es, die Koeffizienten $c_{2g,k}(B;Y,s)$ zu berechnen. Hier ist ein möglicher Verlauf dieses Vortrags:

- Definition des *Adélerings* über $\mathbb{Q}$ und der *Siegel'schen automorphen Formen* nach dem Buch [Shi4] von Shimura (s. Seiten 76-80).
- Der Zusammenhang zwischen klassischen Siegel'schen Modulformen und automorphen Formen (Lemma 10.8 in [Shi4]).
- Die Fourierentwicklung von automorphen Formen (Proposition 18.3 in [Shi4]).
- Die Definition der Siegel'schen Eisensteinreihen (klassisch und adélisch). Das ist in loc. cit. auf den Seiten 150 und 151 zu lesen. Der Zusammenhang zwischen den beiden ist in Lemma 18.7 ebenda erläutert.

- Das lokale Integral an der ∞-Stelle. Das ist Lemma 18.12 in loc. cit.
- Die Berechnung der lokalen Integrale an den endlichen Primstellen. Beweis von Proposition 18.14 in loc. cit.

Literatur: Ausschnitte von [Shi4].

9 Cohen-Eisensteinreihen B

Das Hauptziel dieses Vortrags ist die Definition der so genannten *Cohen-Eisensteinreihen* und das Studium ihrer Grundeigenschaften. Cohen-Eisensteinreihen sind Modulformen von halbganzem Gewicht, die durch den Shimuralift klassischen Eisensteinreihen zugeordnet sind (vgl. Vortrag 3). Hier ist ein möglicher Verlauf dieses Vortrags:

Als erstes definieren wir für $N \in \mathbb{R}$ und $r \geq 1$ eine ganze Zahl

$$H(r,N) := \begin{cases} \sum_{d2|N} h(r, N/d2) & \text{falls } (-1)^r N \equiv 0, 1 \bmod (4) \text{ und } N > 0, \\ \zeta(1-2r) & \text{falls } N = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei für $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1$

$$h(r,N) := \begin{cases} \frac{(-1)^{[r/2]}(r-1)!2N^{r-1/2}}{(2\pi)^r} L(r, \chi_{(-1)^r N}) & \text{falls } (-1)^r N \equiv 0, 1 \bmod (4), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann definieren wir formal die Cohen-Eisensteinreihen $\mathcal{H}_r$ durch die formale q-Entwicklung

$$\mathcal{H}_r(z) := \sum_{N=0}^{\infty} H(r,N) q^N, \quad q := e^{2\pi i z}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Reihe eine Modulform von Gewicht $(2r+1)/2$ darstellt. Das ist Theorem 3.1 in [Coh]. Dazu studiert man die folgenden Eisensteinreihen

$$E_{r+1/2}(z) := \sum_{n>0 \text{ ungerade}, \, m} \left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{-4}{n}\right)^{-(r+1/2)} (nz+m)^{-(r+1/2)}$$

und

$$F_{r+1/2}(z) := E_{r+1/2}(-1/4z) z^{-(r+1/2)}.$$

Das passiert auch in [Shi1]. Hier zeigt man vermöge ihrer q-Entwicklung die folgende Gleichung

$$\mathcal{H}_r(z) = 2^{-(2r+1)} \zeta(1-2r)[(1 + i^{2r+1} E_{r+1/2}(z) + i^{2r+1} F_{r+1/2}(z)].$$

Hieraus folgt, dass die Cohen-Eisensteinreihen Modulformen halbganzen Gewichts sind. Weiter kann man sehen, dass die Cohen-Eisensteinreihen im Bild des Shimuralifts liegen.

Literatur: [Coh] und Abschnitt 6 in [Ike2].

10 Die Fourier-Jacobi-Entwicklung K

Wir führen eine neue Sorte holomorpher Funktionen mit interessanten Transformationseigenschaften ein, die *Jacobiformen*. Es stellt sich heraus, dass diese natürlich in der Theorie der Siegel'schen Modulformen auftauchen. Denn sortiert man die Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{t \geq 0} a_t e_n(tz)$$

einer Siegel'sche Modulform $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ nach den unteren rechten Blöcken $t_4^{(j)}$ mit $0 \leq j \leq n$, so sind die Vorfaktoren $\varphi_{t_4}(z_1, z_2)$ in der neuen Entwicklung

$$f(z) = \sum_{t_4 \geq 0} \varphi_{t_4}(z_1, z_2) e_{n-j}(t_4 z_4)$$

gerade Jacobiformen. Um letztere besser zu verstehen, drückt man sie durch die gut bekannten Thetareihen aus. All das lässt sich am besten in [Fre] nachlesen, wo es allgemeiner und auch etwas ausführlicher behandelt wird als in [Ike2].

Nun kann man diese Zerlegung im von Ikeda studierten Spezialfall noch etwas genauer untersuchen, was in diesem Vortrag auch vorgeführt werden soll. Mit Theorem 3.2 aus [Ike1] folgt, dass die Fourier-Jacobi-Koeffizienten der in Vortrag 8 eingeführten Funktion $\mathcal{E}_{2n,k'}$ sich durch die Cohen-Eisensteinreihen aus dem letzten Vortrag beschreiben lassen. Das angesprochene Theorem soll als Import behandelt werden; ein bisschen Hintergrund soll aber auf alle Fälle bereit gestellt werden.

Literatur: Abschnitte $7-9$ in [Ike2] und [Fre], Seiten 317-321. Theorem 3.2 in [Ike1] (in adélischer Sprache).

11 Vektorwertige Modulformen halbganzen Gewichts K

Zu Beginn dieses Vortrags führen wir die Begriffe der *vektorwertigen Modulform* und ihres Multiplikatorsystems ein. Außerdem definieren wir den Begriff der *kompatiblen Familie von Eisensteinreihen* als eine Familie von gewissen Abwandlungen der Cohen-Eisensteinreihe mit einer festen Fourier-Jacobi-Entwicklung und zeigen in einem kleinen Lemma, wie man aus einer gegebenen solchen Familie weitere kompatible Familien von Eisensteinreihen herleitet.

Wir erinnern uns nun an die Definition des Rings der reziproken Laurentpolynome $\mathcal{R}_p$ für eine beliebige Primzahl p und setzen $\mathcal{R} := \bigotimes_p \mathcal{R}_p$. Dies wenden wir auf kompatible Familien von Eisensteinreihen an, indem wir in deren Fourier-Jacobi-Entwicklung Funktionswerte eines festen Elements $\Phi \in \mathcal{R}$ entdecken. Wir zeigen, dass dieses schon identisch Null sein muss, wenn die betreffenden Funktionswerte allesamt verschwinden.

Anschließend benutzen wir die in Vortrag 3 eingeführte Funktion h, um einen Spezialfall zu studieren.

Zu guter Letzt geben wir ein Lemma an, das für den Beweis unserer Hauptresultate entscheidend ist. Dieses werden wir allerdings in diesem Seminar nicht beweisen. Es wäre schön, wenn der Vortragende den in den Abschnitten 12 und 13 geführten Beweis kurz anskizzieren könnte.

Literatur: Abschnitt 10 **in [Ike2]**

12 Beweis der Hauptsätze

Literatur: Abschnitt 11 **von [Ike2].**

Literatur

[Coh] H. Cohen. *Sums Involving the Values at Negative Integers of L-Functions of Quadratic Characters*. Math. Ann. **217** (1975), Seiten 271-285.

[FB] E. Freitag, R. Busam. *Funktionentheorie*. Springer, 1993.

[Fre] E. Freitag. *Siegelsche Modulfunktionen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Nr. **254**. Springer, 1983.

[Ike1] T. Ikeda. *On the Theory of Jacobi Forms and the Fourier-Jacobi Coefficients of Eisenstein series*. J. Math. Kyoto Univ. **34** (615-636), Seiten 1994.

[Ike2] T. Ikeda. *On the Lifting of Elliptic Cusp Forms to Siegel Modular Forms of Degree* $2n$. Ann. Math. **154** (641-681), Seiten 2001.

[Kat] H. Katsurada. *An explicit formula for Siegel series*. Amer. J. Math. **121/2** (1999), Seiten 415-452.

[Kit1] Y. Kitaoka. *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*. Nagoya Math. J. **95** (1984), Seiten 73-84.

[Kit2] Y. Kitaoka. *Arithmetic of quadratic forms*. Cambridge Tracts in Mathematics, Nr. **106**. Cambridge University Press, 1993.

[Koh] W. Kohnen. *Modular Forms of Half-Integral Weight on* $\Gamma_0(4)$. Math. Ann. **248** (249-266), Seiten 1980.

[Maa] H. Maaß. *Siegel's modular forms and Dirichlet series. Dedicated to the last great representative of a passing epoch. Carl Ludwig Siegel on the occasion of his seventy-fifth birthday.*. Lecture Notes in Mathematics, Nr. **216**. Springer, 1971.

[Shi1] G. Shimura. *On Modular Forms of Half Integral Weight*. Ann. Math. **97/3** (1973), Seiten 440-481.

[Shi2] G. Shimura. *On Eisenstein series*. Duke Math. J. **50/2** (1983), Seiten 417-476.

[Shi3] G. Shimura. *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*. Invent. Math. **116** (1994), Seiten 531-576.

[Shi4] G. Shimura. *Euler Products and Eisenstein Series*. CBMS Regional Conf. Series in Math. A.M.S Providence RI, 1997.