Wintersemester 2017

Gruppenkohomologie - Seminarprogramm

Prof. G. Böckle, K. Fischer

Quellen: Die Hauptquelle im ersten Teil ist das Skript von Sharifi [6]. Zur Vorbereitung sei auch der detailierte Seminar-Aufschrieb [1] empfohlen. Allerdings enthält dieser oft mehr Details, als im engen Zeitrahmen eines Vortrags präsentiert werden können. Hier ist Zeitmanagement durch den Vortragenden gefragt.
Im zweiten, zahlentheoretischen Teil verwenden wir das kurz gefasste Buch von Jacobson [2] als Leitfaden und verweisen auf Lorenz [3] und Neukirch [4] für weitere Details.

1. Vortrag (Gruppenkohomologie): Dieser Vortrag gibt grundlegenenden Definitionen und führt die Gruppen $H^i(G, M)$ ad-hoc mittels *inhomogener Koketten* ein. Quelle sind die Seiten 5-11 in [6].

- Gruppenring, G-Moduln, G-(Ko-)Invarianten
- inhomogene Koketten C^i, Bew. $d^2 = 0$, $H^i(G, M)$ ist funktoriell in M
- lange exakte Sequenz (Thm. 1.2.11)
- die augmentierte Standardauflösung ist eine exakte Auflösung von $\mathbb{Z}$ (Prop. 1.3.2)
- für endliches, zyklisches $G = \langle g \rangle$ ist die Folge (1.10.1) eine exakte projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$

2. Vortrag (H^1, H^2): Die Gruppen $H^1(G, M)$ und $H^2(G, M)$ des letzten Vortrags sind Lösungen zu Klassifizierungsproblemen in der Gruppentheorie: Derivationen und Erweiterungen. Dieser Vortrag stellt die beiden Probleme und ihre klassischen Lösungen vor. Quelle ist Kapitel 6 im Buch von Weibel [7].

- $H^1(G, M)$= Derivationen/Prinzipalderivationen (6.4.5) in [7]
- Beispiele 6.4.7 und 6.4.8 in *loc.cit.*
- semi-direktes Produkt und Exc. 6.4.2
- Def. Gruppen-Erweiterungen, §6.6 in [7]
- $H^2(G, A) = EXT(G, A)$ (6.6.3 in [7]) (siehe auch Thm. 1.2.4 in [5])
- inhomogene 2-Kozyklel heißen auch *Faktorsysteme*; dazu siehe etwa [3] S. 253

3. Vortrag (Derivierte Funktoren): Homologische Algebra assoziiert zu einer projektiven Auflösung $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ von G-Moduln eine Folge abelscher Gruppen. Wir wenden dies auf die Standardauflösung aus Vortrag 1 an und erhalten eine neue Beschreibung von $H^i(G, M)$ für einen beliebigen G-Modul M. Quelle ist [6], S.11-15

- Def. (1.3.1) und Thm. 1.3.3 von [6]
- H^i als Ext (1.3.6)
- Homologie via Standard-Auflösung, Tor und Links-Abgeleiteter von $(\cdot)_G$ (§1.4)
- Def. (Ko-)Induzierte Moduln und Prop. 1.5.4
- Bew. Shapiro's Lemma (Adjunktion Res $\dashv$ Ind)

4. Vortrag (Tate-Kohomologie): Für eine endliche Gruppe G verbindet *Tate-Kohomologie* die Homologie- und Kohomologie-Folgen in einem unbeschränkten Komplex $\hat{H}^*(G, M)$. Quelle: S. 15-19 in [6]

- Def. Normabbildung: $A_G \to A^G$, $\hat{H}^0, \hat{H}_0$
- Definition von $\hat{H}^\bullet$ (1.6.5 in [6]) und Thm. 1.6.6
- $\hat{H}$ verschwindet auf Induzierten (1.6.7)
- Tate-Kohomologie als Kohom. des unbeschränkten Komplexes $C^\bullet := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(Q_\bullet, A)$ (Thm 1.6.11)

5. Vortrag (Dimensionsverschiebung und Funktorialität in G, Teil 1): Dimensionsverschiebung erlaubt Beweise zu H^i in H^0 zu führen. Dies "erkauft" man sich durch kompliziertere Koeffizienten-Moduln.
Quelle: [6] S. 20-21

- Definition A_*, A^* und Beweis $A_* = I_G \otimes A, A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A)$ (1.7.3)
- Beweis Dimensionsverschiebung (1.7.4+1.7.5)
- Korollare: $|G|$ killt $\hat{H}$ etc.

Ein Morphismus von Paaren $(G, A) \to (G', A')$ induziert Abbildungen auf der Kohomologie. Wir stellen wichtige Beispiele für solche Morphismen vor: Inf, Res und Konjugation.
Quelle: [6] S. 22-27

- Def. Kompatible Paare und induzierte Morphismen (1.8.1/2)
- Beispiele: Untergruppe $H \leq G \rightsquigarrow$ Res, Faktorgruppe $G \twoheadrightarrow G/N \rightsquigarrow$ Inf (1.8.6)
- Beweis der Inf-Res-Folge (Thm. 1.8.10/11)
- Konjugation g^* (1.8.12)

6. Vortrag (Funktorialität 2 und kohomologische Trivialität): Parallele Definitionen zu letztem Vortrag sind auch für die Homologie möglich. Quelle [6] S. 26-30

- Kompatible Paare für Homologie,
- Bsp. Cor (1.8.14), Res (1.8.18)
- $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} = |G : H|$ (1.8.22)

Im zweiten Teil wird die Klasse der induzierten Moduln stark erweitert, indem kohomologisch triviale Moduln eingeführt werden. Im restlichen Vortrag ist G als endlich vorausgesetzt.
Quelle [6] S. 39-43

- Def. A koh.triv., Bsp: A induziert, A projektiv
- Beweis (mit einigen Zwischenschritten) A koh. triv $\Leftrightarrow$ proj.dim.(A) ≤ 1 (1.11.11)

7. Vortrag (Cup-Produkt): Die G-Modul-Struktur auf dem Tensorprodukt $M \otimes N$ zweier G-Moduln induziert eine Abbildung $\cup$: $H^i(M) \otimes H^j(N) \to H^{i+j}(M \otimes N)$.
Quelle: [6] S. 30-36

- Def. $\cup$ auf Kohom.
- Eigenschaften
- Analoga für Tate-Koh. $\hat{H}$

8. Vortrag (Zyklische Gruppen und der Satz von Tate): Sei G zyklisch von endlicher Ordnung. Dann ist $\hat{H}^i(G, A) \cong \hat{H}^{i+2}(G, A)$. Besonders interessant ist, dass alle Isomorphismen durch eine einzige Wahl und das Cup-Produkt induziert werden.
Quelle: [6] S. 37-39

- Kapitel §1.10 bis 1.10.3 (inkl. Beweis)

Im zweiten Teil des Vortrags kommen wir zum kohomologischen Hauptresultat des Seminars: Wir benutzen die Charakterisierung kohomologisch trivialer G-Moduln aus Vortrag 6 um mit dem Satz von Tate einen wichtigen Satz der Klassenkörpertheorie zu beweisen.
Quelle: S. 43-46 in [6]; siehe auch §I.7 in [4]

- Kapitel §1.12 in [6]; eventuell müssen einige Beweisdetails gekürzt werden

Die weiteren Vorträge beschäftigen sich mit **Anwendungen der Gruppenkohomologie auf die Zahlentheorie.** Dabei sind die Quellen oft für pro-endliche Gruppen G und topologische G-Moduln geschrieben. Im Rahmen des Seminars wollen wir uns aber auf die diskrete Theorie beschränken.

9. Vortrag (Kummer-Theorie): Ist G eine Galoisgruppe $G(L/K)$, so spricht man von $H^i(G, M)$ auch als *Galoiskohomologie*. Beispiele für G-Moduln sind dann L und $L^\times$. Die grundlegenden Resultate für diese Moduln lernen wir in diesem Vortrag kennen: Satz von Dedekind, Normalbasensatz, Hilbert 90.
Quelle S. 60-65 in [6]; siehe auch §11.3-11.5 in [1]

- kurze Bemerkung zu pro-endlichen Gruppen; Krull-Topologie auf $Gal(K^{\mathrm{sep}})$; im Weiteren: G endlich
- Hilbert 90 (Thm. 2.4.3) mit Hilfe der Lemmata aus [1]
- ad-hoc Definition $Br(K) := H^2(G_K, (K^{\mathrm{sep},\times})$ und Eigenschaften (Prop. 2.4.8)
- Kummer-Sequenz (2.4.1) und Prop. 2.4.12 (in [4] S.115-117 ist alles für endliche Erweiterungen aufgeschrieben)
- Kummer-Theorie 2.4.19 und 2.4.21
- ausgewählte Beispiele aus dem Rest des Kapitels

10. Vortrag (Zentraleinfache Algebren 1): Die Brauergruppe eines Körpers F klassifiziert zahlentheoretische Objekte: zentraleinfachen Algebren A über F bis auf Äquivalenz. Dieser Vortrag führt die notwendigen Grundbegriffe für das Klassifikationsresultat ein. Es gibt mehr zu sagen, als in 90 Minuten sinnvoll behandelt werden kann! Quelle S. 215-220 [2] als Leitfaden (und §29 in [3] für Details)

- Def. zentraleinfache Algebren
- Motivation: Satz von Maschke und Struktursatz von Wedderburn

- Prop. 4.8/9/10 in [2]
- Def. Einhüllende $A \otimes A^{\mathrm{op}}$ und Thm 4.6 in [2]
- Def. Zentralisator; Theorem 4.7 und Korollare zu Tensorprodukten z. e. Algebren

11. Vortrag (Zentraleinfache Algebren 2): Quelle: [2] S. 221-224 (und [3] §29 für mehr Details)

- Def. Zerfällungskörper; Thm. 4.8
- Def. $\deg(A)$
- Thm 4.9 und Satz von Skolem-Noether (interessante Folgerung ist 29.21 in [3]: $Br(\mathbb{F}_q) = 1$)
- Doppel-Zentralisator-Satz (siehe auch Satz 29.14 in [3])
- Thms 4.11/12 in [2]
- Falls Zeit bleibt: Def. der reduzierten Norm/Spur ([3] §29.7)

12. Vortrag (Die Brauer-Gruppe und Verschänkte Produkte): Nach der Definition der Brauer-Gruppe $Br(F)$ eines Körpers beschreiben wir einen Gruppenhomomorphsmus $H^2(G(E/F), E^\times) \to Br(F)$
Quelle: [2] §4.7 und 8.4 (siehe auch §30 in [3])

- Def. Brauergruppe nach §4.7 [2] und $Br(F) = \bigcup_E Br(E/F)$
- Def. Verschränktes Produkt $(E, G, k) \in Br(E/F)$ (Thm 8.7)
- Bew. Theoreme 8.8-8.11: $H^2(G(E/F), E^\times) \cong Br(E/F)$

13. Vortrag (Funktorialitäten von $Br(F)$): Die aus der Kohomologie bekannten Abbildungen inf, res angewandt auf die zu Faktorsystemen assoziierten Algebren entpuppen sich als klassische Operationen auf Algebren. Weiß man, dass jeder Repräsentant von $[A] \in Br(K)$ einen separablen Zerfällungskörper enthält, so folgt dass $[A]$ torsion ist.
Quellen: [2] 8.8 und [3] §30.2/30.3

- Beweis: Es gibt separable Zerfällungskörper [2] §8.8 oder [3] 29.F21
- Inflation und Restriktion [3] 30.2 (insb. F1, F2)
- $Br(F)$ ist Torsion [3]; §30.3 oder [2] 8.22

14. Vortrag (Zyklische und Quaternionenalgebren): Als Spezialfall der verschränkten Produkte werden zyklische Algebren eingeführt und wir beweisen erneut, dass $Br(\mathbb{F}_q) = 1$ ist. Anschließend bestimmen wir die 2-Torsion in $Br(F)$ indem wir Quaternionen-Algebren untersuchen. Quelle: [3] §30.4 und [2] 8.5

- Def. zyklische Algebren §30.4. oder [2] 8.5
- Inflation und Restriktion für zyklische Algebren; Satz 5 in [3]
- Kor.: alle endlichen Schiefkörper sind Körper
- Quaternionen-Algebren: Def., Zusammenhang mit quadratischen Formen (F4) und Rechenregeln (F5)
- Auswahl an Ergebnissen zu Quat.Alg.: *Satz von Legendre* oder *reelle Grundkörper*

15. Vortrag (Ausblick zu Galois-Darstellungen): Themenauswahl in Rücksprache mit dem Dozenten.

Referenzen:

[1] J. Stix; O. Venjakob, *Gruppenkohomologie*, Seminarausarbeitung, Bonn, WS 05/06
`https://www.uni-frankfurt.de/52288670/Seminar_Gruppenkohomologie.pdf`

[2] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, 2nd Ed., Dover Publishing, 2009

[3] F. Lorenz, *Einführung in die Algebra II*, 2nd Ed., Spektrum, 1997

[4] J. Neukirch, A. Schmidt (Ed.) *Class field theory*, Springer, 2015, online auf der Homepage des Editors

[5] Neukirch, Schmidt, Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer, 2001

[6] R. Sharifi, *Group and Galois cohomology*, verfügbar unter `math.ucla.edu/~sharifi/groupcoh.pdf`.

[7] C. Weibel, *Introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1994