Dr. J. M. Cerviño
Mathematisches Institut, IWR
INF 368, Büro 212
Universität Heidelberg

Quadratische Formen, SS2011

Zeit und Ort: Di., Do. 09:00-11:00, INF 288, HS 3
Beginn: am 12.04.2011 um 9 Uhr c.t.

Warum quadratische Formen?

Ein klassisches Problem im Gebiet der Zahlentheorie und der Arithmetik ist das Lösen von diophantischen Gleichungen – heutzutage würde man eher vom Gebiet der arithmetischen Geometrie und der Suche nach rationalen Punkten auf projektiven Varietäten sprechen. Eine solche Varietät wird durch ein System von Gleichungen von der Form $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ gegeben, wobei f ein homogenes Polynom vom Grad d mit ganzzahligen Koeffizienten ist – wenn $d = 2$ ist, dann heißt f *quadratische Form*. Das Hauptproblem der arithmetischen Geometrie besteht darin, ganzzahlige Lösungen (also die x_i's aus $\mathbb{Z}$, nicht alle gleichzeitig 0) für dieses Gleichungssystem zu finden – sollte es mind. eine solche geben, dann sagt man, dass das System *lösbar* ist. Ein klassisches Resultat besagt, dass jede projektive Varietät durch Gleichungen der Form $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ mit $d = 2$ gegeben werden kann. Dieses Resultat ist eine Ermunterung dazu, quadratische Formen zu studieren, und eine Warnung zugleich, da bekanntlich rationale Punkte auf Varietäten zu finden, eine äußerst schwierige Aufgabe sein kann.

Eine viel einfachere Fragestellung wäre, ganzzahlige Lösungen von einer einzigen quadratischen Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ zu suchen.

Was werden wir in der Vorlesung machen?

Diese Vorlesung ist eine Einfürung in die überwiegend arithmetische Theorie der quadratischen Formen. Wir werden uns also, um an das Vorherige anzuknüpfen, mit einer einzigen Gleichung befassen

$$f(x_1, \ldots, x_n) = t$$

wobei f eine ganzzahlige quadratische Form ist und t eine beliebige ganze Zahl.

Um wichtige Resultate in dieser Richtung zu sehen, werden wir erst einmal etwas aufholen müssen und uns zunächst mit quadratischen Formen über Körpern befassen. Dabei werden wir sie auf allgemeinen sowie endlichen, lokalen und auch globalen Körpern studieren (hierzu gehört der berühmte Satz von Hasse über das "Lokal-Global Prinzip"). So auch wie in [Kneser], werden wir die grundlegenden Begriffe von der *algebraischen* Theorie der quadratischen Formen und deren Folgerungen studieren (wie z.B. Clifford-Algebren). Danach werden wir quadratische Formen über (lokalen und globalen) Ringen betrachten und die geometrische Sprache der Gitter einführen sowie ihre arithmetischen Invarianten und Konstruktionssätze solcher mit vorgegebenen Invarianten. Über globalen Ringen (inbs. über $\mathbb{Z}$) werden wir die Begriffe von *Geschlecht* und *Spinorgeschlecht* einführen und in diesem Zusammenhang einige zentrale Resultate Beweisen, wie der Satz vom Minkowski-Siegel. Das genaue Studieren der orthogonalen Gruppe wird uns, insbesondere im letzten Teil, sehr beschäftigen.

Einige schöne Resultate (als Motivation?)

Jetzt möchte ich, als Ansporn, ein paar alte und neue Resultate vorstellen, die wir in der Vorlesung besprechen/beweisen werden.

1. Für $t > 2$ eine Primzahl, ist die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = t$ lösbar genau dann, wenn $t \equiv 1 \mod 4$ ist (Euler, 1747).
2. Die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t$ ist immer lösbar für $t \in \mathbb{N}$ (Lagrange, 1770).
3. Es gibt 55 andere quaternäre (d.h. in vier Variablen) quadratische Formen $f = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$ mit a, b, c, d positive ganze Zahlen, für die $f = t$ lösbar ist für beliebige $t > 0$ (Conway, Schneeberger, Bhargava, 2000)[1].
4. Für f eine klassische (d.h. die zugehörige Gramsche Matrix ist ganzzahlig) quadratische Form, gilt:
   $f = t$ ist lösbar für alle $t \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn die Gleichung $f = t$ lösbar für alle $t \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15\}$ ist (auch Conway, Schneeberger, Bhargava, 2000)[2].

Die obigen Resultate sind von qualitativer Natur; also beantworten die Frage, ob die quadratische Gleichung lösbar ist oder nicht. In Bezug auf den Satz von Minkowski-Siegel, zum Beispiel, sind die Resultate von quantitativer Natur und deshalb etwas schwieriger zu präsentieren. Das prominenteste Beispiel hierfür ist die quantitative Version des Satzes von Lagrange, (2) oben, durch Jacobi (1834). Wenn wir $r(t) := \#\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t\}$ setzen, dann hat Lagrange bewiesen, dass $r(t) > 0$ für alle $t > 0$, und Jacobi hat die quantitative Version dieses Resultats gegeben, nämlich:

$$r(t) = 8 \sum_{d|t,\, 4\nmid d>0} d.$$

Diese Resultate motivieren die faszinierende *analytische* Theorie der quadratischen Formen, welche den Übergang von Arithmetik zur Analysis und Geometrie ermöglicht.[3]

Was wird vorausgesetzt?

Die Vorlesung setzt Lineare Algebra I und II voraus. An der einen oder anderen Stelle können Kenntnisse in Algebra und/oder elementarer Zahlentheorie hilfreich sein (z.B. die Algebra I von Prof. Wingberg im letzten Semester), aber *nicht* notwendig.

Gibt es Übungen, Leistungsnachweis?

Es wird eine Klausur am Ende der Vorlesung angeboten, um damit 4 Leistungspunkte erwerben zu können. Wöchentlich werden Übungsblätter ausgegeben, um

1. den Studierenden die unentbehrliche Möglichkeit zu geben, den vorgetragenen Stoff besser zu verstehen (“lerning by doing”);
2. der Vorlesung begleitende Resultate selber zu beweisen, die für sie relevant sind.

[1] Ramanujan hat im Jahr 1916 eine Liste von insgesamt 55 erstellt – ihm fehlte $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2$.

[2] Die Anzahl der Variablen hier ist beliebig! Dieser berühmte Satz ist bekannt als “Conway–Schneeberger Fifteen Theorem”, oder kurz “15-Theorem”.

[3] Und evtl. eine Fortsetzung?

Eine Übungsstunde im üblichen Sinne wird es nicht geben. Selbstverständlich können (und sollen) Sie in meine Sprechstunde kommen, um die eine oder andere Hilfe zu bekommen. Die Klausur wird auf den in den Übungsblättern gestellten Aufgaben basieren.

Welche Literatur wird benutzt?

Wir werden hauptsächlich zwei grundlegende Bücher benutzen: [Kneser] und [O'Meara]. Arbeiten von J. Conway, M. Bhargava könnten auch gelegentlich benutzt werden.

Literatur

[Kneser] Martin Kneser, *Quadratische Formen*, Springer Verlag 2002.

[O'Meara] O. T. O'Meara, *Introduction to quadratic forms*, reprint of the 1973 edition, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2000.