Seminar - Gruppenkohomologie

Wintersemester 2017/18

Prof. G. Böckle
K. Fischer

Sei G eine Gruppe und M ein G-Modul, also ein Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ oder, äquivalent, ein $\mathbb{Z}$-Modul, der eine $\mathbb{Z}$-lineare Wirkung von G trägt. Für einen G-Modul M bezeichne

$$M^G := \{m \in M | g \cdot m = m, \forall g \in G\}$$

den $\mathbb{Z}$-Modul der *G-invarianten Elemente von M*. Die Zuordnung $M \mapsto M^G$ definiert einen linksexakten Funktor $\mathbb{Z}[G]$-Mod $\to$ $\mathbb{Z}$-Mod. Die Methoden der Homologischen Algebra erlauben es rechtsabgeleitete Funktoren $H^i(G, \cdot)$, $i \geq 0$, zu definieren, die *i-te Kohomologie von G mit Koeffizienten in M*. Jede kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

liefert dann eine lange exakte Folge

$$0 \to X^G \to Y^G \to Z^G \to H^1(G, X) \to H^1(G, Y) \to H^1(G, Z) \to H^2(G, X) \to \cdots .$$

Die so definierten Kohomologiegruppen (und analoge Homologiegruppen) zum Paar (G, M) stehen im Mittelpunkt des Seminars.

Kohomologietheorien sind ein fundamentales Hilfsmittel in vielen Bereichen der modernen Mathematik. Ihr Ursprung findet sich in der Algebraischen Topologie. Rasch wurden die Anwendungen ausgedehnt auf das Studium von Gruppen, Algebraische Zahlentheorie, Algebraische Geometrie etc. Das Seminar will insbesondere Hilfsmittel für die Zahlentheorie bereitstellen. Dort ist G oft die Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ für eine Galoiserweiterung $L \supset K$. Hauptziele des Seminars sind der Satz von Tate, ein wichtiges Hilfsmittel für die Klassenkörpertheorie, und die Rolle der Kohomologie beim Studium zentraleinfacher Algebren.

Neben der Entwicklung der Theorie wollen wir uns auch mit konkreten Fragen beschäftigen: Welche anschauliche Deutung haben die Gruppen $H^i(G, X)$ für $i = 1, 2$? Wie lassen sie sich berechnen? Welche Verbindungen gibt es zwischen der Kohomologie von G und der ihrer Untergruppen $H \leq G$?

Auch studieren wir einige Anwendungen dieses Formalismus auf die Bereiche Algebra und Zahlentheorie: Was haben Normalbasen mit Kohomologie zu tun? Welche Rolle spielt die Kohomologie für abelsche Erweiterungen L/K bei der Kummertheorie? Wie klassifiziert Kohomologie zentraleinfache K-Algebren?

Erwartete Vorkenntnisse: Kenntnisse der Algebra 2; der Besuch der algebraischen Zahlentheorie ist für die späteren Vorträge nützlich

Zeit: Dienstag 14-16h

Vorbesprechung: Eine Vorbesprechung mit Vortragsvergabe findet am Donnerstag, den 27.7., um 16 Uhr s.t. im Konferenzraum 5. Stock statt.

Literatur: Als Leitfaden dient das Skript *Groups and Galois cohomology*, von Romyar Sharifi. Spätere Teile benötigen weiterführende Literatur, z.B. aus Jacobson, Basic Algebra II.